JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XX. — ANNÉE 1855.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1855

TABLE DES MATIÈRES.

TOME XX.

ERRATA.

Pages	Lignes.	
73	26	*au lieu de* un pareil double mode d'opérations, *lisez* un pareil mode d'opérations d'un tour entier.
81	27	*après le mot* contraire, *ajoutez* dans tous les autres rapports.
84	19	*au lieu de* états, *lisez* parties.
99	23	*au lieu de* autour, *lisez* autant.
118	15	*au lieu de* d'un, *lisez* d'une.
119	2	*au lieu de* $f(x)^{\frac{1}{2}}$, *mettez* $f(x)$.
199	10	*au lieu de* $\int p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$, *mettez* $\int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n)$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOUVELLE THÉORIE DES TUYAUX SONORES;

PAR M. QUET,
Recteur de l'Académie de Besançon.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 7 août 1854.)

Avant Daniel Bernoulli, pour expliquer les phénomènes très-variés des instruments à vent, on n'avait qu'une vague comparaison due à Galilée et la belle expérience de Sauveur que Newton immortalisa. Bernoulli, le premier, dévoila la cause de la multitude de sons que l'on peut tirer d'un même tuyau; il eut, en effet, l'heureuse idée de regarder la colonne aérienne comme capable de se subdiviser en un nombre plus ou moins grand de concamérations, et il vérifia par expérience cette conception fondamentale. Il esquissa, en outre, une théorie mathématique des phénomènes; mais cette théorie, même perfectionnée par Euler, et surtout par Lagrange, n'embrasse pas tous les faits connus et se trouve incomplète. En se plaçant à un point de vue nouveau, Poisson, qui avait à un si haut degré l'instinct de la physique mathématique, donna une nouvelle extension à la théorie des tuyaux sonores; son travail est resté comme la dernière expression du progrès dans ce genre de recherches très-délicates, et, aujourd'hui encore, il est invoqué par les physiciens. Après les brillants travaux des physiciens géomètres que j'ai cités, il y a peut-être quelque témérité à se basarder dans la carière; aussi ai-je longtemps hésité. Pourtant, la théorie de Poisson ne me paraît pas exempte de graves difficultés dans ses principes et ses conséquences; je demande donc à l'Académie la permission de lui présenter le peu que j'ai fait, en sollicitant toutefois son indulgence.

Fig. 1.

Poisson a représenté la vitesse et la condensation dans un tuyau ouvert par les formules suivantes :

$$v = \frac{h \cos 2\pi \dfrac{l-x}{\lambda} \sin \dfrac{2\pi at}{\lambda}}{\cos \dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$s = \frac{h \sin 2\pi \dfrac{l-x}{\lambda} \cos \dfrac{2\pi at}{\lambda}}{a \cos \dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Ces équations supposent qu'à l'orifice A du tuyau AB la tranche aérienne reçoive une vitesse donnée et égale à

$$h \sin \frac{2\pi at}{\lambda}.$$

a est la vitesse du son dans l'air;

λ est la longueur d'ondulation complète qui correspond au nombre de vibrations exécutées par la tranche A en une seconde de temps;

l est la longueur du tuyau AB;

x est la distance AM d'une section normale quelconque MM' à l'orifice A;

v et s sont la vitesse et la condensation relatives à la section MM', à l'époque t.

Les formules précédentes montrent que la sonorité d'un tuyau ouvert est minimum pour les sons compris dans ce qu'on appelle la série normale des tuyaux ouverts, c'est-à-dire pour ceux qui correspondent à la série suivante :

$$\lambda = 2l, \quad \frac{2l}{2}, \quad \frac{2l}{3}, \quad \frac{2l}{4}, \ldots$$

La sonorité du tuyau doit augmenter de plus en plus à mesure que l'on s'éloigne de cette série, et atteindre son maximum lorsqu'on produit les sons de la série normale des bourdons, c'est-à-dire ceux de la série que voici :

$$\lambda = 4l, \quad \frac{4l}{3}, \quad \frac{4l}{5}, \quad \frac{4l}{7}, \ldots$$

L'expérience ne confirme pas ces résultats théoriques; en effet, les tuyaux ouverts résonnent très-bien lorsqu'on leur fait produire les sons de leur série normale ou ceux qui les avoisinent; ils résonnent médiocrement, ou pas du tout, pour les sons de la série normale des bourdons. Par des artifices particuliers, on peut, il est vrai, obtenir cette dernière série; mais alors, par l'effet même de ces artifices, les tuyaux cessent d'être des tuyaux ouverts, et ne sont plus, à proprement parler, que des bourdons renversés.

Poisson s'est probablement préoccupé de cette difficulté assez grave que présente sa théorie, car il semble avoir cherché à y échapper par cette remarque. Dans les calculs, la vitesse de chaque tranche est supposée très-petite, et si l'expression finale de cette vitesse devient infinie pour la série normale des bourdons, on a là une contradiction algébrique qui désigne l'impossibilité des sons de cette série. Si l'on admettait ce mode d'interprétation, il resterait toujours une difficulté insurmontable, car les formules montrent qu'en s'approchant de plus en plus de la série normale des bourdons, on rend les tuyaux ouverts de plus en plus sonores, ce qui n'est pas conforme à l'expérience. Mais il est aisé de voir que la difficulté n'est pas seulement partielle, qu'elle est tout entière. Les formules indiquées ne sont pas celles que la théorie de Poisson fournit immédiatement, elles se déduisent par approximation de ces dernières : si, au lieu des formules tronquées, on prend les équations complètes, on trouve alors que la remarque de Poisson n'est plus applicable; car dans ces équations, la vitesse ne devient pas infinie pour les sons de la série normale des bourdons, et prend une valeur maximum finie.

Ces contradictions entre la théorie et l'expérience, contradictions qui se retrouvent tout naturellement dans le jeu des bourdons, doivent tenir aux principes mêmes de la théorie; examinons donc maintenant ces principes. Les calculs de Poisson reposent sur deux hypothèses principales qui sont relatives à l'état de l'air aux deux extrémités des tuyaux. A l'extrémité du tuyau qui est opposée à l'orifice, Bernoulli, et plus tard Lagrange, avaient admis que la vitesse de l'air y est nulle quand il s'agit des bourdons, et que la condensation y est nulle quand il s'agit des tuyaux ouverts. Poisson a fait voir, par des raisons qui me paraissent péremptoires, que ces hypothèses sont trop absolues et ne peuvent représenter que par approximation la vérité; il leur a alors substitué une hypothèse plus générale, la plus simple, au reste, qu'on puisse imaginer : il a supposé qu'il s'établit dans cette région des tuyaux un rapport constant entre la vitesse et la condensation; ce rapport est positif afin qu'il y ait condensation ou dilatation, selon que le fluide est poussé en dehors ou en dedans du tube; il est d'ailleurs très-petit dans les bourdons et très-considérable dans les tuyaux ouverts. Sans doute, au lieu de faire une hypothèse sur le rapport dont je viens de parler, il vaudrait mieux le déterminer par la théorie; mais le problème est très-difficile, personne n'a essayé de le résoudre; et, en attendant, on est bien obligé d'avoir recours à une hypothèse. Celle de Poisson est la plus simple; à mon avis, elle est parfaitement admissible : lorsque l'on cherche à lui donner l'interprétation physique dont elle est susceptible, on voit aisément qu'il n'y a rien de mieux à faire jusqu'ici. Ce n'est donc pas dans la manière dont Poisson envisage l'état de l'air au bout du tuyau opposé à l'orifice qu'on peut trouver la raison des contradictions que j'ai signalées. Voyons, maintenant, comment il envisage l'état de l'air à l'orifice même; Poisson se donne tout simplement la vitesse de l'air dans cette région du tube, comme si elle était indépendante du mouvement antérieur dans le tuyau. Lorsqu'il s'agit d'un problème purement abstrait, on peut choisir des données arbitraires qui ne se contredisent pas ; mais dans un problème de physique, on est obligé d'accepter les choses comme elles sont, et on ne peut se donner ce qui est inconnu en réalité. Dans le cas des tuyaux sonores, il est aisé de voir, au moins à ce qu'il me semble, que l'hypothèse de Poisson n'est pas acceptable. Pour le montrer, prenons un exemple particulier, qu'il sera ensuite facile de généraliser; supposons que l'on excite dans l'air libre, qui précède le tube, une série d'ondes planes, perpendiculaires au tuyau, se propageant vers son orifice, et entretenant le mouvement vibratoire de la mince lame qui se trouve dans cette partie du tube. A chaque instant, le mouvement qui arrive communique à la tranche aérienne une vitesse et une condensation déterminées que l'on peut supposer connues ou données; mais cette vitesse et cette condensation ne constituent pas toute la vitesse et toute la condensation de la tranche; sans elles, la tranche aurait une vitesse et une condensation inconnues qui dépendent de tout le mouvement antérieur établi dans le tube; la vitesse totale à l'orifice se compose donc à chaque instant de deux parties, l'une qui est une vitesse communiquée et donnée, l'autre qui est une vitesse résultant de l'état antérieur; il en est de même pour la condensation. Ce que je viens de dire pour le mode particulier d'ébranlement que j'ai supposé, est évidemment général. Si ces considérations sont exactes, elles nous montrent, dans les principes mêmes de la théorie de Poisson, la raison des contradictions signalées entre les résultats des formules et de l'expérience.

Maintenant, je vais essayer de donner une nouvelle théorie qui me paraît plus conforme à l'expérience; j'indiquerai, en premier lieu, les restrictions qui en limitent les applications et les hypothèses sur lesquelles elle est fondée.

Je suppose d'abord que, dans une section droite quelconque du tube, la vitesse est à chaque instant la même pour tous les points de cette section. Je ne veux pas affirmer par là que les vibrations dans les tuyaux ont généralement ce caractère; j'indique seulement que je ne m'occuperai que des phénomènes dans lesquels ces conditions sont remplies. Il est bien évident qu'une personne placée dans un tunnel et projetant sa voix contre la paroi de ce genre de tube ne produira pas des vibrations parallèles à l'axe; il y a plus : dans les tubes étroits et courts, tels que les tuyaux d'orgue, ces conditions peuvent quelquefois ne pas être satisfaites; je m'en suis assuré de la manière suivante. J'ai fermé, avec une membrane mince et tendue, l'ouverture supérieure d'un tuyau d'orgue vertical; j'ai mis du sable sur la membrane, et puis j'ai fait résonner le tuyau. En faisant varier convenablement le son produit, j'ai obtenu sur la membrane des lignes nodales, composées tantôt de droites, tantôt de courbes ovales et fermées, ou même de courbes plus compliquées. Ces lignes nodales indiquaient évidemment qu'au-dessous de la membrane, dans le tube, l'air avait des nœuds correspondants, et que, par suite, les particules d'une même section normale au tuyau n'avaient pas la même vitesse. Les sons que j'ai pu tirer de ces bourdons d'une nouvelle espèce étaient souvent remarquables par l'éclat de leur timbre, et m'auraient inspiré le désir d'utiliser leurs effets curieux, si la fragilité et l'inconstance de ces sortes d'appareils n'étaient pas des obstacles à leur application.

Lorsqu'on passe un archet sur le bord d'un cylindre vertical qui contient de l'eau, on détermine, comme on sait, à la surface du liquide une série de rides qui indiquent des lignes nodales perpendiculaires à la surface du vase. En superposant de l'eau sur du mercure et en reproduisant cette expérience, j'ai reconnu facilement que les lignes nodales à la surface de l'eau et à la surface de séparation des deux liquides sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface du cylindre. En variant ces sortes d'expériences, on est tout naturellement porté à conclure que, lorsque le cylindre vibre plein d'air, il doit s'établir dans cet air des surfaces nodales qui passent par l'axe du cylindre et sont perpendiculaires à sa surface. On trouve donc encore ici un cas où les vibrations ne remplissent pas les conditions dans lesquelles je renferme la théorie. L'expérience des liquides superposés me paraît donner, par ses lignes nodales visibles, une image de ce qui se passe probablement dans la masse d'air d'une cloche frappée par le marteau; s'il en est ainsi, la puissance renforçante de l'air contenu dans les cloches doit être assez difficile à déterminer par l'analyse.

Par ces divers exemples, on voit que le problème que je veux traiter n'est pas le problème général des vibrations qui peuvent s'établir dans un tuyau : il s'agit ici d'un problème particulier, posé avec des conditions bien déterminées et dont les résultats ne pourront être comparés aux expériences, qu'autant que ces expériences s'exécuteront dans les mêmes conditions; cependant il nous donnera des notions générales qui seront utiles pour interpréter la plupart des expériences ordinaires que l'on fait avec les tuyaux d'orgue.

Je vais maintenant tirer les principales conséquences qui se déduisent de la supposition que j'ai faite.

Je désigne par D, e, γ, γ' la densité de l'air, sa force élastique, sa chaleur spécifique à pression constante et sa chaleur spécifique à volume constant, lorsque dans le tuyau l'air est dans son état naturel d'équilibre.

Je pose

$$a^2 = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot \frac{e}{\mathrm{D}};$$

a jouit, comme on sait, d'une signification physique : cette quantité est égale à la vitesse de propagation du son dans l'air considéré.

Je désigne par x la distance d'une section quelconque MM' à l'orifice A du tuyau, par v la vitesse et par s la condensation de l'air dans cette section à l'époque t. x et v sont comptés positivement dans le sens de A vers B; s est positif ou négatif, suivant qu'il y a dans l'air condensation ou dilatation.

De quelque manière que le mouvement de l'air ait été primitivement produit et se trouve entretenu, pourvu que la restriction dont j'ai déjà parlé ait lieu, les quantités v et s seront deux fonctions de x et t que l'on peut déduire d'une troisième fonction φ satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Cette fonction a pour forme générale

$$\varphi = f_1(x + at) + \mathrm{F}_1(x - at),$$

f_1 et F_1 désignant deux fonctions arbitraires qu'il faudra déterminer par les conditions ultérieures du problème.

Les valeurs de v et s se déduisent de la fonction φ par les équations suivantes :

$$v = \frac{d\varphi}{dx}, \quad s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Je désigne par $f(u)$, $F(u)$ les dérivées par rapport à u des fonctions $f_1(u)$, $F_1(u)$, et j'ai pour les valeurs de v et s,

$$v = f(x+at) + F(x-at), \tag{1}$$

$$as = -f(x+at) + F(x-at). \tag{2}$$

La seconde hypothèse que je ferai se rapporte à l'état de l'air à l'extrémité du tuyau opposée à l'orifice A; elle est la même que celle de Poisson. J'admets donc qu'en B il s'établit un rapport constant entre la vitesse et la condensation, et je représenterai ce rapport par

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{k},$$

k étant une constante. Ce rapport sera positif, afin qu'il y ait en B condensation ou dilatation, selon que l'air est poussé en dehors ou en dedans du tube; il sera très-petit ou très-grand, suivant que le tuyau sera fermé en B par un obstacle solide, ou s'ouvrira dans l'air libre. Cette hypothèse est certainement ce qu'il y a de plus simple à faire, en l'absence d'une théorie exacte; cependant, comme elle a quelque chose d'abstrait en elle-même, je vais chercher à montrer, par une interprétation physique, qu'elle est tout à fait naturelle et très-probable. A cet effet, je suppose que le tuyau est indéfiniment prolongé du côté de A, afin de faire abstraction des réflexions qui pourraient s'opérer à l'orifice, et je considère une onde quelconque complétement établie dans le tube et se dirigeant vers B. Au moment où elle atteint l'extrémité B, les vitesses sont distribuées dans le tube suivant une loi quelconque; je désigne par $\psi(x)$ la vitesse que possède alors la tranche MM'. La condensation n'est pas arbitraire dans les ondes complétement constituées; on sait qu'elle est une fraction de la vitesse $\psi(x)$ exprimée par $\frac{1}{a}\psi(x)$. Cela posé, admettons que l'extrémité B soit un obstacle parfaitement fixe; alors il s'opère sur B une réflexion dont les lois sont parfaitement connues : les vitesses incidentes engendrent par réflexion des vitesses négatives ou positives, suivant qu'elles sont elles-mêmes positives ou négatives; les condensations engendrent des condensations, et les dilatations donnent des dilatations. A l'époque $t + t'$, la vitesse et la condensation en MM' seraient, en vertu de l'onde incidente,

$$\psi(x - at'), \quad \frac{1}{a}\psi(x - at');$$

par la réflexion, cette vitesse et cette condensation seraient, d'après la loi connue,

$$-\psi(2l - x - at'), \quad \frac{1}{a}\psi(2l - x - at').$$

On aurait donc

$$v = \psi(x - at') - \psi(2l - x - at'),$$
$$s = \frac{1}{a}\psi(x - at') + \frac{1}{a}\psi(2l - x - at').$$

Le rapport $\frac{v}{s}$ serait donc, en général, variable; cependant, à l'extrémité B, où l'on a

$$x = l,$$

ce rapport deviendrait nul, et, par suite, serait constant. Dans la pratique, les fonds des bourdons ne forment pas des obstacles absolument fixes, ils peuvent même se trouver doués d'une grande mobilité quand ils sont donnés par des membranes très-minces; les ondes réfléchies ne peuvent donc plus avoir rigoureusement la même vitesse et la même condensation que les ondes incidentes, abstraction faite du signe, et la réflexion n'a plus pour seul effet de retourner, pour ainsi dire, les ondes incidentes. On admet généralement et il est naturel de supposer qu'après la réflexion, l'onde réfléchie est reconstituée sur le même patron qu'avant la réflexion; le retournement de l'onde incidente est encore opéré, les condensations et les dilatations donnent lieu encore à des condensations et des dilatations; seulement les vitesses et les condensations sont toutes réduites dans un rapport constant dont la valeur dépend de la manière dont le fond des bourdons peut vibrer lui-même. En d'autres termes, on admet que l'onde réfléchie, au lieu de fournir à la tranche MM' la vitesse et la condensation données par

$$-\psi(2l - x - at'), \quad \frac{1}{a}\psi(2l - x - at'),$$

y apporte cette vitesse et cette condensation réduites dans un rapport constant, et, par suite, exprimées par

$$-b\psi(2l - x - at'),\quad \frac{b}{a}\psi(2l - x - at'),$$

b étant une fraction positive.

En admettant ces hypothèses très-naturelles, qui, au reste, ne m'appartiennent pas, on aura, pour la tranche MM',

$$v = \psi(x - at') - b\psi(2l - x - at'),$$
$$s = \frac{1}{a}\psi(x - at') + \frac{b}{a}\psi(2l - x - at');$$

le rapport de v à s est généralement variable; mais, quelles que soient la nature de la fonction ψ et l'époque $t + t'$, on a pour la section B,

$$\frac{v}{s} = \frac{1-b}{1+b}a;$$

il s'établit donc un rapport constant entre la vitesse et la condensation sur le fond B, et l'on voit que ce rapport est positif et égal à une fraction de a.

Le tuyau peut être ouvert en B et communiquer librement avec l'atmosphère. Dans ce cas, les ondes qui atteignent B ne sortent pas du tuyau sans éprouver une réflexion; sans cela il serait difficile de concevoir comment un tuyau ouvert peut devenir capable de renforcer les sons. Cette réflexion des ondes sur l'air libre serait intéressante à constater par l'expérience, et je me propose de le faire aussitôt que j'en aurai l'occasion; toutefois, personne ne la regarde comme douteuse, et l'on admet qu'en B il se fait un partage, qu'une partie du mouvement incident se transmet au dehors et qu'une autre partie se réfléchit. Je ferai maintenant remarquer que l'onde réfléchie n'a pas ici tout à fait le même caractère de simplicité que lorsque le fond B est un obstacle solide; on admet que toute onde condensée incidente produit par la réflexion une onde dilatée dans laquelle les dilatations se succèdent de la même manière que les condensations dans l'onde incidente, mais avec des valeurs absolues réduites toutes dans la même proportion; toute onde dilatée engendre de la même manière une onde condensée formée sur le même patron. Quant aux vitesses, elles ne changent pas de signe par la réflexion, elles se trouvent seulement réduites dans un même rapport. En général, il y a deux sortes de réflexions; on applique la première sorte au cas des bourdons, et la deuxième au cas des tuyaux ouverts. Si l'on veut exprimer par des formules les idées généralement reçues, on écrira qu'au lieu de la vitesse et de la condensation fournies par un obstacle fixe à la tranche MM', savoir,

$$-\psi(2l - x - at'), \quad \frac{1}{a}\psi(2l - x - at'),$$

on aura la vitesse et la condensation exprimées par les formules suivantes :

$$b'\psi(2l - x - at'), \quad -\frac{b'}{a}\psi(2l - x - at'),$$

b' étant une fraction positive. En partant de ces principes, la vitesse totale et la condensation en MM' sont :

$$v = \psi(x - at') + b'\psi(2l - x - at'),$$

$$s = \frac{1}{a}\psi(x - at') - \frac{b'}{a}\psi(2l - x - at').$$

Le rapport $\frac{v}{s}$ est encore ici généralement variable; cependant en B, pour

$$x = l,$$

la valeur de ce rapport devient

$$\frac{1 + b'}{1 - b'}a,$$

c'est-à-dire qu'il y est constant, positif et plus grand que a.

Les deux cas du bourdon et du tuyau ouvert en B peuvent se confondre en un seul, car il suffit de regarder la quantité b qui entre dans le rapport

$$\frac{1 - b}{1 + b}a$$

comme positive pour les bourdons, et comme négative pour les tuyaux ouverts en B.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que les hypothèses les plus naturelles et les plus probables que l'on puisse faire sur le mode de réflexion des ondes, nous conduisent à cette conséquence, qu'à l'extrémité B il doit s'établir un rapport constant entre la vitesse et la condensation. Réciproquement, en posant en principe, comme le fait Poisson, la constance de ce rapport, il est facile de voir que, dans le cas d'une réflexion, sans mélange d'autres réflexions, cette hypothèse conduit aux caractères généraux des ondes réfléchies tels qu'on les admet généralement.

Ainsi, nous regarderons l'hypothèse de Poisson sur l'état de l'air en B, non-seulement comme très-simple, mais, en outre, comme naturelle et très-probable, et nous l'admettrons pleinement dans notre théorie.

Je considère maintenant la troisième hypothèse, celle qui est relative à l'état de l'air à l'orifice A. Je suppose que l'on communique artificiellement à l'air de la section A une vitesse et une condensation exprimées par les fonctions quelconques $\psi(t)$ et $\frac{1}{a}\chi(t)$, cette vitesse et cette condensation ne sont pas la vitesse totale v et la condensation totale s de l'air à l'orifice; si, à l'époque t, on cessait d'agir sur cet air, la tranche en A aurait néanmoins une vitesse v' et une condensation s', provenant du mouvement antérieurement établi dans le tuyau, en sorte qu'en réalité, on a

$$v = v' + \psi(t), \quad s = s' + \frac{1}{a}\chi(t).$$

Or la vitesse v' et la condensation s' doivent être soumises à des conditions analogues à celles qui ont lieu à l'extrémité B; j'admettrai donc encore ici qu'il s'établit un rapport constant entre les parties v' et s' de la vitesse et de la condensation totale; je désignerai par $-\frac{a}{k'}$ ce rapport, et j'aurai

$$\frac{v'}{s'} = -\frac{a}{k'},$$

k' est ici une quantité positive, pour que le rapport $\frac{v'}{s'}$ soit négatif. Ce signe provient de ce que, en A, il doit y avoir condensation ou dilatation, suivant que la tranche aérienne tend à sortir ou à entrer dans le tuyau, c'est-à-dire suivant que sa vitesse v' est négative ou positive. Cette hypothèse peut se justifier de la même manière que pour l'extrémité B; en effet, une onde qui arrive de B vers A, au moment où elle atteint l'orifice A, a sa vitesse et sa condensation exprimées par les formules

$$\mu(x), \quad -\frac{1}{a}\mu(x),$$

μ étant une fonction quelconque; l'onde est supposée complétement constituée et établie dans un tuyau indéfini du côté de B, afin de n'avoir pas égard aux réflexions qui pourraient s'opérer en B. Dans une pareille onde, qui se propage de B vers A, les condensations et les dilatations ont lieu, comme on le sait, suivant que la vitesse de la tranche est dans le sens de la propagation ou en sens contraire, c'est-à-dire suivant que $\mu(x)$ est négatif ou positif : c'est pour cela qu'on a mis le signe — devant l'expression de la condensation ; d'ailleurs la vitesse et la condensation doivent avoir un rapport égal à $\frac{1}{a}$, abstraction faite du signe. Après le temps $t+t'$, la tranche MM' reçoit par le mouvement incident la vitesse et la condensation données par

$$\mu(x+at'), \quad -\frac{1}{a}\mu(x+at').$$

Si l'obstacle en A était parfaitement fixe, l'onde réfléchie apporterait en MM', à l'époque $t+t'$, la vitesse et la condensation exprimées par

$$-\mu(at'-x), \quad -\frac{1}{a}\mu(at'-x).$$

Mais, à cause du défaut de fixité de l'obstacle, cette vitesse et cette condensation se trouvent réduites dans un rapport constant c, et sont

$$-c\mu(at'-x), \quad -\frac{c}{a}\mu(at'-x),$$

c étant positif ou négatif, suivant que le tuyau est fermé en A par un corps solide ou s'ouvre librement dans l'atmosphère. La vitesse et la condensation complètes de la tranche MM′ sont donc

$$\mu(x + at') - c\mu(at' - x),$$
$$-\frac{1}{a}\mu(x + at') - \frac{c}{a}\mu(at' - x).$$

Le rapport de ces deux quantités est, en général, variable, mais en A, où l'on a

$$x = 0,$$

ce rapport devient

$$-\frac{1 - c}{1 + c}a,$$

et la quantité c étant positive ou négative, mais en grandeur absolue plus petite que l'unité, ce rapport est toujours négatif. D'ailleurs, sa valeur absolue est plus petite ou plus grande que a, suivant que le tuyau est fermé en A ou s'ouvre librement dans l'air. Ainsi la considération des ondes incidentes et réfléchies nous amène à ce résultat, qu'il s'établit en A un rapport constant et négatif entre la vitesse et la condensation ; réciproquement, si ce rapport constant est admis, il en résultera par la constitution des ondes réfléchies les propriétés qui sont généralement acceptées et que j'ai indiquées. La troisième hypothèse de ma théorie n'est donc pas nouvelle, car elle ne fait avec la deuxième hypothèse qu'une seule et même supposition.

Ces préliminaires étant posés, je remarque qu'en vertu de la première hypothèse les valeurs de v et s pour la tranche quelconque MM′ doivent être de la forme indiquée par les équations (1), (2). En vertu de la deuxième hypothèse, on doit avoir, quel que soit t, mais pour $x = l$, la relation

$$\frac{v}{as} = \frac{1}{k}. \tag{3}$$

En vertu de la troisième hypothèse, on doit avoir, quel que soit t, mais pour $x = 0$, la relation

$$\frac{v - \psi(t)}{as - \chi(t)} = -\frac{1}{k'}. \tag{4}$$

Enfin, l'état initial de l'air dans le tuyau peut être quelconque, et je le représente par

$$(5) \qquad v = \mu(x),$$

$$(6) \qquad as = \lambda(x),$$

équations qui doivent être satisfaites pour $t = 0$, quelle que soit la valeur de x comprise entre 0 et l; les fonctions $\mu(x)$ et $\lambda(x)$ sont supposées données dans cette étendue. On peut remarquer que ces fonctions, quoique arbitraires, doivent satisfaire à

$$\frac{\mu(l)}{\lambda(l)} = \frac{1}{k},$$

et à

$$\frac{\mu(0) - \psi(0)}{\lambda(0) - \chi(0)} = \frac{1}{k'};$$

le problème consiste maintenant à déterminer les valeurs générales de v et s, de manière à satisfaire aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Je porte les valeurs de v, s des équations (1), (2) dans l'équation (3), et j'ai

$$(k+1)f(l+at) = (1-k)\,F(l-at).$$

Je pose

$$(7) \qquad b = \frac{k-1}{k+1},$$

b sera positif lorsque B sera un fond solide, et négatif lorsque B communiquera avec l'air libre. L'équation précédente devient

$$(8) \qquad f(l+at) = -bF(l-at).$$

Cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs positives de t; comme $at + l - x$ est positif, je peux substituer cette quantité au lieu de at dans l'équation (8), et j'ai

$$f(2l - x + at) = -bF(x - at).$$

En éliminant $F(x - at)$ entre cette équation et les équations (1) et (2), j'ai

$$(9) \qquad v = f(x+at) - \frac{1}{b}f(2l - x + at),$$

$$(10) \qquad as = -f(x+at) - \frac{1}{b}f(2l - x + at).$$

Je fais $t = 0$ dans ces expressions, et je les porte dans les équations (5) et (6); j'ai ainsi

$$\mu(x) = f(x) - \frac{1}{b} f(2l - x),$$

$$\lambda(x) = -f(x) - \frac{1}{b} f(2l - x),$$

d'où l'on tire

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\mu(x) - \frac{1}{2}\chi(x),\\ f(2l - x) &= -\frac{b}{2}\mu(x) - \frac{b}{2}\lambda(x).\end{aligned}\right.$$

Ces équations doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de x entre 0 et l; elles donnent donc les valeurs de la fonction $f(z)$ pour toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 2l$.

Je porte les valeurs de v et s données par les équations (9), (10) dans l'équation (4), et j'ai

$$f(2l + at) = b\frac{k' - 1}{k' + 1} f(at) - \frac{bk'}{k' + 1}\psi(t) - \frac{b}{k' + 1}\chi(t).$$

Je pose

$$(12)\qquad c = \frac{k' - 1}{k' + 1},$$

$$(13)\qquad \chi(t) = \psi(t) + \psi_1(t), \quad r = \frac{b}{k' + 1};$$

la quantité c sera positive ou négative, suivant que A sera un obstacle solide ou communiquera librement avec l'air.

L'équation précédente devient

$$f(2l + at) = bcf(at) - b\psi(t) - r\psi_1(t).$$

t' étant positif et quelconque, je peux substituer t' à t dans cette équation. Je pose, d'ailleurs,

$$at' = 2il + z,$$

i étant un nombre entier qui indique combien de fois $2l$ est contenu dans at', r étant le reste qui est compris entre 0 et $2l$; l'équation précédente me donne ainsi

$$f[2(i+1)l+z] = bcf(2il+z) - b\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right).$$

t' étant quelconque, rien n'empêche d'appliquer cette équation à toutes les valeurs de t' qui correspondent à une même valeur de z et aux différents nombres entiers compris depuis i jusqu'à 0 ; on obtient alors la suite d'équations que voici :

$$f[2(i+1)l+z] = bcf(2il+z) - b\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right),$$

$$\begin{aligned} f(2il+z) = bcf[2(i-1)l+z] &- b\psi\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right] \\ &- r\psi_1\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[2(i-1)l+z] = bcf[2(i-2)l+z] &- b\psi\left[\frac{2(i-2)l+z}{a}\right] \\ &- r\psi_1\left[\frac{2(i-2)l+z}{a}\right], \end{aligned}$$

. . . .

$$f(4l+z) = bcf(2l+z) - b\psi\left(\frac{2l+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2l+z}{a}\right),$$

$$f(2l+z) = bcf(z) - b\psi\left(\frac{z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{z}{a}\right).$$

Je multiplie ces $i+1$ équations respectivement par 1, bc, b^2c^2, $b^3c^3, \ldots, (bc)^{i-1}$, $(bc)^i$, puis je les ajoute, et j'ai

$$\begin{aligned} f[2(i+1)l+z] &= (bc)^{i+1}f(z) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) + bc\psi\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right] + \ldots \\ &+ (bc)^{i-1}\psi\left(\frac{2l+z}{a}\right) + (bc)^i\psi\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}\right\} \\ &- r\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right) + bc\psi_1\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right] + \ldots \\ &+ (bc)^{i-1}\psi_1\left(\frac{2l+z}{a}\right) + (bc)^i\psi_1\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

Je remets at' à la place de $2il + z$, et j'ai

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} f(2l + at') &= (bc)^{i+1} f(z) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi(t') + bc\psi\left(t' - \frac{2l}{a}\right) + \ldots \\ &+ (bc)^{i-1}\psi\left(t' - \frac{2(i-1)l}{a}\right) + (bc)^i \psi\left(t' - \frac{2il}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &- c\left\{\begin{aligned} &\psi_1(t') + bc\psi_1\left(t' - \frac{2l}{a}\right) + \ldots \\ &+ (bc)^{i-1}\psi_1\left(t' - \frac{2(i-1)l}{a}\right) + (bc)^i \psi_1\left(t' - \frac{2il}{a}\right)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, z étant compris entre 0 et $2l$, $f(z)$ sera une quantité connue d'après l'état initial, comme on l'a déjà vu. Au reste, b et c sont des fractions ; abstraction faite du signe, $(bc)^{i+1}$ sera une fraction très-petite et le terme $(bc)^{i+1} f(z)$ sera négligeable lorsqu'on prendra pour i un nombre un peu considérable. Comme $(bc)^{i+1} f(z)$ est le seul terme qui dépende de l'état initial, on voit que $f(2l + at')$ sera sensiblement indépendant de cet état lorsque i sera assez grand.

Je pose maintenant

$$at' = at - x.$$

Lorsque t et x sont donnés, en divisant $at - x$ par $2l$, on aura un quotient entier et un reste ; le quotient fournira le nombre i, et le reste la quantité z. En faisant cette substitution dans l'équation précédente, on a

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} f(2l - x + at) &= (bc)^{i+1} f(z) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) \\ &+ b^2c^2\psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right) + \ldots + (bc)^i \psi\left(t - \frac{2il + x}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &- c\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\psi_1\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) \\ &+ b^2c^2\psi_1\left(t - \frac{4l + x}{a}\right) + \ldots + b^ic^i \psi_1\left(t - \frac{2il + x}{a}\right)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Je pose dans l'équation (14),

$$at' = at - 2l + x.$$

x et t étant les mêmes quantités que dans l'équation (15), en divisant $at - 2l + x$ par $2l$, on aura un quotient entier et un reste. Je désigne par j le quotient et par y le reste. On a ainsi

$$at - x = 2il + z, \quad at - 2l + x = 2jl + y,$$

d'où

$$j = i - 1 + \frac{x}{l} + \frac{z - y}{2l}.$$

On voit par là que j sera égal à $i - 1$ ou à i, et qu'il sera égal a i, lorsque $x = l$, c'est-à-dire à l'extrémité B du tuyau. En portant la valeur précédente de at' dans l'équation (14), on a

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} f(x + at) &= (bc)^{j+1} f(y) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &- r\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des valeurs (15), (16), les expressions de v et s données par les équations (9) et (10), deviennent

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} v &= (bc)^{j+1} f(y) - b^i c^{i+1} f(z) \\ &+ \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) + b^2 c^2 \psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right) + \ldots \\ &\qquad + b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il + x}{a}\right) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &+ \frac{r}{b}\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il + x}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &- r\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

$$
(18)\quad\left\{
\begin{aligned}
as &= -(bc)^{j+1} f(y) - b^i c^{i+1} f(z) \\
&+ \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) + \ldots + b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+x}{a}\right) \\
&+ b \left\{
\begin{aligned}
&\psi\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l-x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ \frac{r}{b} \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ r \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l-x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsqu'on appliquera les équations (18), (17) au bout B, on y fera $j = i$, et au bout A, $j = i - 1$.

Il est facile de vérifier que les formules (17), (18) satisfont à toutes les conditions du problème, au moins lorsque t est plus grand que $2l - x$. Ces équations sont déduites de l'équation (14) où t' est essentiellement positif, ce qui suppose que $at - x$ et $at - 2l + x$, qu'on a substitués à at', tour à tour, soient aussi positifs. Je fais $x = l$ dans les formules, alors $j = i$ et $z = y$, et on a

$$
v = (1-b)\left\{
\begin{aligned}
&- b^i c^{i+1} f(z) + \left\{
\begin{aligned}
&\psi\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ \frac{r}{b} \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\}.
$$

$$
as = (b+1)\left\{
\begin{aligned}
&b^i c^{i+1} f(z) + \psi\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+l}{a}\right) \\
&+ \frac{r}{b} \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\};
$$

on tire de là

$$\frac{v}{s} = \frac{1-b}{1+b}\,a.$$

Mais, d'après l'équation (7), on a

$$1 - b = \frac{2}{k+2}, \quad 1 + b = \frac{2k}{k+1};$$

donc

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{k};$$

c'est là une des conditions imposées au problème.

Je fais $x = 0$ dans les équations (17) et (18), alors $j = i - 1$ et $z = y$, et on a

$$v = (1-c)\left\{\begin{array}{l} b^i c^i f(z) - b\psi\left(t - \frac{2l}{a}\right) - b^2 c\psi\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ \qquad + b^i c^{i-1}\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \\ - r\left\{\begin{array}{l} \psi_1\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1}c^{i-1}\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$+ \psi(t) + \frac{r}{b}\psi_1(t),$$

$$as = (c+1)\left\{\begin{array}{l} -b^i c^i f(z) + b\left\{\begin{array}{l} \psi\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1}c^{i-1}\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \\ + r\left\{\begin{array}{l} \psi_1\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1}c^{i-1}\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$+ \psi(t) + \frac{r}{b}\psi_1(t);$$

on tire de là

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t) - \frac{r}{ab}\psi_1(t)} = \frac{c-1}{c+1}\,a.$$

D'après l'équation (12), on a

$$c - 1 = -\frac{2}{k'+1}, \quad c + 1 = \frac{2k'}{k'+1}, \quad \frac{c-1}{c+1} = -\frac{1}{k'}.$$

D'après cela, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t) - \frac{r}{ab}\psi_1(t)} = -\frac{a}{k'}.$$

J'ai supposé que la source du son est indépendante du mouvement vibratoire du tuyau, et qu'elle communique à l'orifice une vitesse quelconque $\psi(t)$ et une condensation quelconque

$$\frac{1}{a}\psi(t) + \frac{1}{a}\psi_1(t) = \frac{1}{a}\chi(t),$$

sans préjuger d'avance si cette vitesse et cette condensation doivent remplir certaines conditions pour que l'air du tuyau vibre en satisfaisant aux conditions imposées, sauf à laisser à l'analyse le soin d'indiquer si la vitesse et la condensation communiquées doivent remplir certaines conditions. Si l'on compare l'équation précédente à l'équation (4), on voit que l'on obtient la relation

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{as - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)} = \frac{v - \psi(t)}{as - \psi(t) - \psi_1(t)};$$

on tire de là

$$\psi_1(t)\{\psi_1 + v - as - (k'+1)[v - \psi(t)]\} = 0.$$

ou bien

$$\psi_1(t)\{as - \psi(t) - \psi_1(t) + k'[v - \psi(t)]\} = 0.$$

En vertu de l'équation (14), la quantité

$$as - \psi(t) - \psi_1(t) + k'[v - \psi(t)]$$

étant nulle, il en résulte que l'équation précédente est satisfaite indépendamment de toute forme adoptée pour $\psi(t)$ et $\psi_1(t)$.

Il est permis de considérer le mouvement de l'air dans le tuyau lorsque le temps écoulé t est déjà un peu notable : alors i est un nombre assez grand pour que les fonctions $(bc)^i c$, $(bc)^{i+1}$ rendent insensibles les termes $(bc)^{i+1} f(y)$, $b^i c^{i+i} f(z)$ dans les équations (17) et (18); par suite, les expressions de v et s deviennent indépendantes de l'état initial de l'air dans le tuyau. C'est ce que je ferai désormais. Dans beaucoup d'applications, la fonction $\psi_1(t)$ sera nulle; alors la vitesse communiquée à l'orifice étant $\psi(t)$, la condensation communiquée sera $\frac{1}{a}\psi(t)$: cette circonstance se présentera, par exemple, lorsqu'on entretiendra le mouvement de l'air dans le tuyau par les impulsions continuellement communiquées au moyen d'ondes planes, perpendiculaires au tuyau, excitées dans l'air libre qui précède le tube et complétement formées lorsqu'elles atteignent l'orifice A. Je me bornerai ici à considérer les modes d'ébranlement dans lesquels $\psi_1(t) = 0$; au reste, les calculs que je donnerai se reproduiraient aisément dans le cas général. D'après cela, je réduirai les équations (17) et (18) à

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} v = {} & \psi\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{2l+x}{a}\right) + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{4l+x}{a}\right) \\ & + b^3c^3\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \\ & - b\left\{\begin{aligned} & \psi\left(t-\frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{4l-x}{a}\right) \\ & + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} as = {} & \psi\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{2l+x}{a}\right) + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{4l+x}{a}\right) \\ & + b^3c^3\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \\ & + b\left\{\begin{aligned} & \psi\left(t-\frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{4l-x}{a}\right) \\ & + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules on pourra supposer que les séries se prolongent indéfiniment pour les mêmes raisons qui nous ont fait supprimer les termes qui dépendent de l'état initial. Je ferai remarquer que pour passer de l'expression de v à celle de as, il suffit de changer à la fois les signes de b et c; cela nous permettra de nous occuper seulement des transformations de v.

On peut retrouver les expressions de v et de as données par les équations (19), (20) au moyen d'une méthode très-simple, qui servira de contrôle à celle que j'ai déjà employée.

Je suppose, pour plus de simplicité, qu'à l'origine l'air du tuyau est dans son équilibre naturel, et qu'ensuite on communique artificiellement à l'orifice la vitesse $\psi(t)$ et la condensation $\frac{1}{a}\psi(t)$. La tranche MM', placée à la distance $x = \text{MA}$ de l'orifice A, reçoit à l'époque t, par le mouvement direct des ondes qui s'introduisent par l'orifice, la vitesse et la condensation données par les formules

$$\psi\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{1}{a}\psi\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

La vitesse et la condensation qui arrivent en MM' à la même époque par suite d'une seule réflexion opérée en B, sont données par

$$-b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right), \quad \frac{b}{a}\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right),$$

b étant une fraction positive ou négative, suivant que le tuyau est fermé en B ou s'ouvre dans l'air libre.

Par deux réflexions opérées l'une en B, l'autre en A, il arrive aussi à MM' une vitesse et une condensation exprimées par

$$bc\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right), \quad \frac{bc}{a}\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right),$$

c désignant une fraction positive ou négative, suivant qu'en A le tuyau est fermé par un corps solide ou s'ouvre librement dans l'atmosphère.

De même, par trois réflexions, opérées successivement en B, en A et en B, on a la vitesse et la condensation

$$-b^2c\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right), \quad \frac{b^2c}{a}\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right).$$

Par quatre réflexions, on a

$$b^2c^2\psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right), \quad \frac{b^2c^2}{a}\psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right),$$

et ainsi de suite, tant que les quantités

$$t - \frac{x}{a}, \quad t - \frac{2l - x}{a}, \quad t - \frac{2l + x}{a}, \ldots$$

seront positives. Si l'on admet que le temps t est un peu notable, cette suite de termes pourra être beaucoup prolongée et l'on pourra même la supposer prolongée indéfiniment, sans erreur sensible. Si l'on désigne par v et s la vitesse et la condensation complète de la tranche MM', à l'époque t, on aura

$$v = \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) - b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) - b^2 c\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots,$$

$$as = \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) + b^2 c\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots.$$

Ces expressions montrent qu'en B, où l'on a

$$x = l,$$

le rapport de v à s est constant et égal à $\frac{1 - b}{1 + b}a$; elles montrent aussi qu'en A, où l'on a

$$x = 0,$$

le rapport $\dfrac{v - \psi(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t)}$ est constant et égal à $-\frac{1 - c}{1 + c}a$; enfin, ces expressions coïncident avec les formules déjà trouvées (19) et (20).

Je suppose maintenant que la vitesse $\psi(t)$ communiquée à l'orifice se compose d'un nombre quelconque de mouvements simples, et que l'on ait

$$\psi(t) = h\sin\frac{2\pi at}{\lambda} + h'\sin\frac{2\pi at}{\lambda'} + h''\sin\frac{2\pi at}{\lambda''} + \ldots, \tag{21}$$

λ, λ', λ'', etc., sont les longueurs complètes des ondes qui correspondent aux mouvements simples; h, h', h'', etc., sont des constantes.

En portant l'équation (21) dans la valeur générale (19) de v, on a une suite de la forme

$$v = u + u' + u'' + u''' + \ldots, \tag{22}$$

dans laquelle

$$\left\{\begin{aligned} u = h & \left\{\begin{aligned} & \sin 2\pi \frac{at - x}{\lambda} + bc \sin 2\pi \frac{at - 2l + x}{\lambda} \\ & + b^2 c^2 \sin 2\pi \frac{at - 4l + x}{\lambda} + \ldots \end{aligned}\right\} \\ - hb & \left\{\begin{aligned} & \sin 2\pi \frac{at - 2l + x}{\lambda} + bc \sin 2\pi \frac{at - 4l + x}{\lambda} \\ & + b^2 c^2 \sin 2\pi \frac{at - 6l + x}{\lambda} + \ldots \end{aligned}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

u', u'', u''', etc., se déduisent de cette expression de u en y changeant h et λ en h', λ' ou en h'', λ'', etc.

Pour faire la somme de chacune des deux séries contenues dans l'équation (23), il suffit d'employer la formule connue

$$\begin{aligned} \sin y + e \sin(y - z) + e^2 \sin(y - 2z) + e^3 \sin(y - 3z) + \ldots \\ = \frac{\sin y - e \sin(y + z)}{1 - 2e \cos z + e^2}; \end{aligned}$$

de cette manière, on a

$$u = \frac{h}{1 - 2bc \cos \frac{4\pi l}{\lambda} + b^2 c^2} \left\{\begin{aligned} & \sin 2\pi \frac{at - x}{\lambda} - bc \sin 2\pi \frac{at + 2l - x}{\lambda} \\ & - b \sin 2\pi \frac{at - 2l + x}{\lambda} + b^2 c \sin 2\pi \frac{at + x}{\lambda} \end{aligned}\right\}.$$

Je pose

$$\mathrm{H} = \frac{h}{1 - 2bc \cos \frac{4\pi l}{\lambda} + b^2 c^2} = \frac{h}{(1 - bc)^2 + 4bc \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}. \tag{24}$$

Je sépare dans u les quantités $\sin \frac{2\pi at}{\lambda}$, $\cos \frac{2\pi at}{\lambda}$, et j'ai

$$u = \mathrm{H}\left(\mathrm{A} \sin \frac{2\pi at}{\lambda} - \mathrm{B} \cos \frac{2\pi at}{\lambda}\right); \tag{25}$$

les valeurs de A et B sont données par

$$\mathrm{A} = (1 + b^2 c) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - b(1 + c) \cos 2\pi \frac{2l - x}{\lambda}, \tag{26}$$

$$\mathrm{B} = (1 - b^2 c) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} - b(1 - c) \sin 2\pi \frac{2l - x}{\lambda}. \tag{27}$$

Je pose

$$P^2 = A^2 + B^2, \tag{28}$$

A étant plus petit que P, on peut toujours déterminer une suite de valeurs de θ, telles que l'on ait

$$A = P \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}, \tag{29}$$

P étant pris en valeur absolue. Alors on aura, abstraction faite des signes,

$$B = P \sin \frac{2\theta\pi}{\lambda}, \tag{30}$$

et, en prenant $\frac{2\pi\theta}{\lambda}$ entre o degré et 360 degrés, on pourra toujours le déterminer de manière que les équations (29), (30) soient satisfaites, quels que soient les signes de A et B. Par ces transformations l'équation (25) devient

$$u = \mathrm{HP} \sin 2\pi \frac{at-\theta}{\lambda}. \tag{31}$$

Calculons maintenant P et θ, les équations (26), (27), (28) donnent

$$\begin{aligned}
P^2 &= (1+b^2c)^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} + (1-b^2c)^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \\
&\quad + b^2(1+c)^2 \sin^2 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} + b^2(1-c)^2 \sin^2 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} \\
&\quad - 2b(1+c)(1+b^2c) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} \\
&\quad - 2b(1-c)(1-b^2c) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l-x}{\lambda};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^2 &= 1 + b^4c^2 - b^2(1+c^2) + 2b^2c\left(\cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} - \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\
&\quad + 2b^2c\left(\cos^2 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} - \sin^2 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}\right) \\
&\quad - 2b(1+b^2c^2)\left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} + \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}\right) \\
&\quad - 2bc(1+b^2)\left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l-x}{\lambda} - \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l-x}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

$$P^2 = 1 + b^2 + b^2c^2 + b^4c^2 - 2bc(1+b^2)\cos\frac{4\pi l}{\lambda}$$
$$+ 2b^2c\left(\cos\frac{4\pi x}{\lambda} + \cos 4\pi\frac{2l-x}{\lambda}\right) - 2b(1+b^2c^2)\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda},$$

$$P^2 = 1 + b^2 + b^2c^2 + b^4c^2 - 2bc(1+b^2)\cos\frac{4\pi l}{\lambda}$$
$$+ 4bc^2\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda} - 2b(1+b^2c^2)\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda},$$

$$P^2 = -2b\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}\left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right)$$
$$+ (1+b^2)\left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right),$$

$$P^2 = \left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right)\left(1 + b^2 - 2b\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}\right).$$

D'après cela, l'équation (31) devient

$$u = h\sqrt{\frac{1 + b^2 - 2b\cos 4\pi\dfrac{(l-x)}{\lambda}}{1 + b^2c^2 - 2bc\cos\dfrac{4\pi l}{\lambda}}}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},$$

ou bien

$$u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}, \tag{32}$$

en posant

$$\mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}. \tag{33}$$

Quant à θ, on pourra le calculer par la formule suivante :

$$\tang\frac{2\pi\theta}{\lambda} = \frac{(1-b^2c)\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda} - b(1-c)\sin 2\pi\dfrac{2l-x}{\lambda}}{(1+b^2c)\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda} - b(1+c)\cos 2\pi\dfrac{2l-x}{\lambda}}. \tag{34}$$

En désignant par M′, M″, M‴, etc., θ', θ'', θ''', etc., ce que deviennent les valeurs de M et θ données par les formules (33), (34) lorsqu'on y change λ en λ', λ'', λ''', etc., la formule (22) deviendra

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &v = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda} + h'\mathrm{M}'\sin 2\pi\frac{at-\theta'}{\lambda'} \\ &\quad + h''\mathrm{M}''\sin 2\pi\frac{at-\theta''}{\lambda''} + \ldots\end{aligned}\right.$$

Si dans cette équation on change les signes de b et c, et que l'on désigne par N, N', N'', etc., φ, φ', φ'', etc., ce que deviennent respectivement M, M', M'', etc., θ, θ', θ'', etc., on aura

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda} + h'\mathrm{N}'\sin 2\pi\frac{at-\varphi'}{\lambda'} \\ &\quad + h''\mathrm{N}''\sin 2\pi\frac{at-\varphi''}{\lambda''} + \ldots;\end{aligned}\right.$$

N se calculera par la formule

$$(37)\qquad \mathrm{N} = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Lorsqu'on suppose que le mouvement communiqué à l'orifice ne consiste qu'en un seul mouvement simple $h\sin\dfrac{2\pi at}{\lambda}$, on réduira les formules (35), (36) à leur premier terme.

Pour les tuyaux ouverts aux deux bouts, b et c sont négatifs et égaux ; je mets leur signe en évidence, et j'ai

$$(38)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}, \qquad (39)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-b^2)^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(40)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda}, \qquad (41)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-b^2)^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Lorsque le tuyau est ouvert en A et fermé en B, ce qui constitue un bourdon ordinaire, b est positif et c négatif. En mettant les signes en évidence, j'ai

$$(42)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}, \qquad (43)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2+4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2-4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(44)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda}, \qquad (45)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1+b)^2-4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2-4bc\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}.$$

Lorsque le tuyau est ouvert en B et fermé en A, et que, par un petit trou pratiqué au milieu de A, on communique les vibrations à la tranche A, on a ce qu'on appelle improprement un tuyau ouvert, et ce qui n'est autre chose qu'un bourdon renversé. Quoiqu'il soit difficile par ce moyen de donner à la premiere tranche le mouvement régulier que suppose la théorie, on peut néanmoins considérer les formules qui se rapportent au bourdon renversé, quel que soit le moyen qu'on puisse employer pour ébranler l'air, comme l'exige la théorie. ici b est négatif et c positif. En mettant les signes en évidence, on a

$$(46)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}, \qquad (47)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1+b)^2-4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2-4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(48)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda}, \qquad (49)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1-b)^2+4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2-4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}$$

Enfin. pour un tuyau fermé aux deux bouts, b et c sont positifs, et l'on a

$$(50)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}\cdot \qquad (51)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2+4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2+4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(52)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda}, \qquad (53)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1+b)^2-4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2+4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Tuyaux ouverts aux deux bouts.

Fig. 2.

La formule (38) montre que dans chaque section du tuyau le maximum de vitesse est égal à hM. A l'extrémité B, ce maximum est donné par hM', en posant

$$(54)\qquad M'^2 = \frac{(1+b)^2}{(1-b^2)^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Le coefficient h dépend de l'intensité du son qui entretient le mouvement à l'orifice A ; par son carré, il sert de mesure à cette intensité. La proportion dans laquelle ce carré est augmenté, par l'effet du tuyau, dans l'ébranlement de B, n'est autre chose que M'^{2} ; c'est pour cela que M'^{2} sera regardé comme la mesure de la sonorité du tuyau ou de son pouvoir résonnant.

L'équation (54) fait voir que le son correspondant à $\lambda = 2l$ n'est pas le plus grave que le tuyau puisse rendre. Des sons beaucoup plus graves que celui-là, à des degrés très-divers, peuvent être rendus par le tuyau, d'après la formule. Cette conséquence est tout à fait conforme à d'anciennes expériences de Mersenne, par lesquelles il est parvenu à faire descendre le son de la valeur de sept tons entiers, sans changer la longueur du tuyau ; l'artifice qu'il a employé, pour obtenir cet effet avec les embouchures ordinaires, consiste à faire varier le diamètre du tuyau. Voici, au reste, le tableau, pour ainsi dire inconnu, de Mersenne.

Longueur commune des six tuyaux, 72 lignes.

Diamètre des tuyaux......	51^l	25^l	18^l	12^l	6^l	3^l
Sons rendus	la^{*}_{-1}	ut^{*}_{-1}	mi_{-1}	sol_{-1}	la^{*}_{-1}	ut

On a désigné par ut le son rendu par le tuyau de 3 lignes de diamètre, afin de nommer commodément les autres sons, mais on ne l'a pas classé dans la gamme absolue.

Savart a répété les expériences de Mersenne avec six tuyaux de 72 lignes de longueur commune, et il a obtenu les résultats suivants :

Diametre des tuyaux......	54^{l}	33^{l}	23^{l}	18^{l}	15^{l}	10^{l}
Sons rendus	$\mathrm{fa}_4^{\sharp}$	sol_4	la_4	$\mathrm{la}_4^{\sharp}$	si_4	ut_5

Ici les sons se trouvent classés dans la gamme absolue. Le son ut_5 correspond à une onde dont la longueur est de 144 lignes, et par conséquent le double de la longueur du tuyau; il correspond au son fondamental de Bernoulli. On voit que Savart a fait descendre par degrés le son fondamental de la valeur de trois tons.

L'équation (54) montre que, si l'air du tuyau peut vibrer sous l'influence de tous les sons, la sonorité du tuyau est bien loin d'être la même pour chacun d'eux. On peut dire aussi que l'air de tous les tuyaux peut vibrer sous l'influence d'un son donné, mais qu'il y a des longueurs de tuyau qui laissent les vibrations tres-faibles, et d'autres qui leur donnent beaucoup de puissance. La sonorité des tuyaux est la plus grande possible, lorsque les sons produits sont compris dans la série normale des tuyaux ouverts, c'est-à-dire lorsqu'ils correspondent aux valeurs suivantes :

$$\lambda = 2l, \quad \frac{2l}{2}, \quad \frac{2l}{3}, \quad \frac{2l}{4}, \quad \frac{2l}{5}, \ldots, \quad \frac{2l}{i}.$$

La sonorité est encore très-grande lorsque les sons se trouvent voisins de cette série; néanmoins, elle décroît de plus en plus à mesure que l'on s'en écarte. Elle devient minimum pour les sons de la série normale des bourdons, c'est-à-dire pour ceux qui correspondent à

$$\lambda = 4l, \quad \frac{4l}{3}, \quad \frac{4l}{5}, \ldots, \quad \frac{4l}{2i+1};$$

et elle est tres-faible, sans être minimum, pour les sons voisins de cette dernière série.

On a une image assez exacte de ces divers phénomènes dans les anneaux colorés de Newton ; je me suis assuré qu'en effet l'intensité de la lumière dans les anneaux transmis, lorsqu'on tient compte de toutes les réflexions successives, est représentée par une formule complétement analogue à (54). Pour une lumière simple donnée, chaque anneau brillant n'est pas infiniment mince, mais a une certaine largeur, en sorte qu'il correspond à diverses épaisseurs de la lame mince voisine de l'épaisseur relative au maximum d'éclat; chaque anneau obscur a aussi une certaine étendue qui correspond à diverses épaisseurs en deçà et au delà de l'épaisseur relative au minimum d'éclat. De même, une épaisseur donnée de la lame mince transmet toutes les lumières, quelques-unes vivement, l'une d'elles avec le maximum d'éclat, quelques autres médiocrement et l'une d'elles avec le minimum d'intensité. Lorsqu'un mouvement simple de lumière traverse une lame mince et qu'on tient compte des réflexions infinies dans la lame, la vitesse dans l'onde transmise est représentée par

$$m \sin 2\pi \frac{at-\theta}{\lambda},$$

en posant

$$m^2 = \frac{\alpha^2}{(1-b\gamma)^2 + 4b\gamma \sin^2 \frac{2\pi e}{\lambda}},$$

α, β, γ étant les coefficients de transmission à travers la deuxième surface et de réflexion sur cette surface et sur la première; e désignant l'équivalent optique de l'épaisseur de la lame mince, λ étant la longueur d'ondulation, a désignant la vitesse dans le milieu où se propage la lumière transmise, et θ une quantité qui dépend de la distance à laquelle on reçoit la lumière transmise.

La valeur de m^2 représente l'intensité de la lumière transmise: on voit qu'elle est tout à fait de même forme que M'^2 donné par l'équation (54) et qu'elle conduit aux mêmes lois.

La valeur de M^2 donnée par l'équation (39) montre qu'il n'existe pas dans le tuyau de sections normales dans lesquelles la vitesse soit constamment nulle. En effet, la quantité $(1+b)^2 - 4b$ est égale à $(1-b)^2$; elle est constamment positive et ne peut pas devenir nulle, car b est toujours une fraction; à plus forte raison la quantité $(1+b)^2 - 4b \sin^2 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$ ne peut-elle pas devenir nulle. De même, il n'y a pas dans le tuyau de sections pour lesquelles la condensation soit constamment nulle; c'est ce que montre la valeur de N^2 donnée par l'équation (41). Les nœuds et les ventres, tels que les définit Bernoulli, n'existent donc pas dans les tuyaux. Mais on peut appeler nœuds et ventres les sections dans lesquelles la vitesse ou la condensation sont constamment minimum; alors de tels nœuds ou de tels ventres existent en général; ils possedent d'ailleurs les principales propriétés des nœuds et des ventres que l'expérience reconnaît.

Quel que soit le son produit, les nœuds sont toujours équidistants entre eux et leur distance est égale à une demi-ondulation. En effet, l'équation (39) montre que les nœuds sont donnés par la relation

$$l - x = \frac{\lambda}{4}(2i + 1),$$

i étant un nombre entier. On voit par là que la distance de l'extrémité B au premier nœud est égale à $\frac{\lambda}{4}$, et que la distance d'un nœud quelconque au suivant est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

L'équation (41) montre que l'extrémité B est toujours un ventre, mais qu'il n'en est pas de même de l'orifice A. Les ventres sont équidistants entre eux, car ils sont donnés par la relation

$$l - x = i\frac{\lambda}{2},$$

leur distance est égale à $\frac{\lambda}{2}$, et, par suite, à une concamération. La distance du ventre B au premier nœud est toujours égale à $\frac{\lambda}{4}$.

Puisque à partir de B les ventres sont successivement placés à des distances les uns des autres égales à $\frac{\lambda}{2}$, cette suite de longueurs n'aboutira à l'orifice A qu'autant que $\frac{\lambda}{2}$ sera une partie aliquote de la longueur du tuyau, c'est-à-dire qu'autant qu'il s'agira des sons de la série normale des tuyaux ouverts. Pour les autres sons, la distance de l'ouverture A au premier ventre sera plus petite que $\frac{\lambda}{2}$, et sa distance au premier nœud quand il y aura un nœud interposé entre A et le premier ventre, sera plus petite que $\frac{\lambda}{4}$. Les ventres et les nœuds ne sont donc pas symétriquement placés par rapport au milieu du tuyau, lorsque le son produit n'appartient pas à la série normale des tuyaux ouverts.

Si, en partant d'un son quelconque de cette série normale, on augmente la gravité du son, la demi-concamération du second bout du tuyau en B s'allongera, tandis que la distance de l'orifice au premier nœud diminuera et deviendra de plus en plus petite jusqu'à devenir nulle; alors le son produit appartient à la série normale des bourdons; l'orifice devient un nœud et le tuyau résonne médiocrement. Si la gravité du son augmente encore, la distance de l'orifice au premier ventre devient plus petite que $\frac{\lambda}{4}$, diminue de plus en plus jusqu'à devenir nulle; alors le son produit appartient à la série normale des tuyaux ouverts; l'orifice redevient un ventre; tous les nœuds et tous les ventres se trouvent de nouveau symétriquement placés par rapport au milieu du tuyau.

Une discussion analogue se reproduirait facilement pour les bourdons et les tuyaux fermés aux deux bouts; il suffirait de traiter comme précédemment les formules qui se rapportent à ces cas nouveaux.

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES ET LES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. J. STEINER (de Berlin).

(Traduit de l'allemand par M. de Horn, officier au service de Prusse.)

I.

Nombre des normales que l'on peut abaisser d'un point sur une courbe algébrique, et propriétés de la développée de la courbe.

La question : « Combien de normales d'une courbe donnée du » $n^{ième}$ degré passent par un point quelconque P dans le plan de la » courbe? » est équivalente à celle-ci : « Quelle est la classe de la » développée de la courbe donnée? »

On peut répondre facilement à cette question des trois manières suivantes.

1°. Si l'on fait mouvoir la courbe C^n arbitrairement dans son plan autour du point donné P, et qu'on la désigne dans la nouvelle position par C_1^n, les deux courbes se couperont en n^2 points Q. Si l'on ramène la courbe C_1^n à son ancienne position, jusqu'à ce qu'elle tombe sur la courbe C^n, les n^2 points d'intersection Q changent de position, et au dernier moment du mouvement, ils seront précisément les pieds des normales abaissées du pôle P sur la courbe C^n, dont le nombre sera par conséquent n^2.

Un nombre infini de courbes du degré n, faisceau de courbes de ce degré, passera par les pieds des normales, parce qu'ils sont les points d'intersection des courbes C^n et C_1^n.

Étant donnés $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ des n^2 points Q, les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres sont déterminés.

2°. Supposons dans le plan de la courbe donnée C^n un faisceau quelconque de sections coniques $B(C^2)$, c'est-à-dire toutes les coniques qui passent par quatre mêmes points quelconques (réels ou imaginaires); alors

$$n(n + 2.2 - 3) = n(n + 1)$$

de ces coniques seront tangentes à la courbe C^n [*].

Si l'on fait coïncider ces quatre points deux à deux, de telle sorte que les coniques se touchent en deux points réels ou imaginaires, la corde de contact, considérée comme l'ensemble de deux droites coïncidentes, pourra être regardée comme une conique appartenant au faisceau $B(C^2)$. De même, chacun des n points, où elle rencontre la courbe C^n, pourra être regardé comme un des $n(n+1)$ points de contact. Ainsi la courbe ne sera plus touchée que par n^2 des autres coniques proprement dites.

Or, M. Poncelet a montré qu'un système de cercles concentriques peut être envisagé comme un faisceau de coniques qui se touchent en deux points, ayant pour corde de contact idéale la droite située à l'infini. Il s'ensuit que, parmi tous les cercles décrits autour du point donné P, il en existe en général n^2 qui touchent la courbe donnée C^n. Les rayons menés aux points de contact seront les n^2 normales de la courbe C^n, passant par le point P.

3°. Des recherches auxquelles se rapporte le compte rendu mensuel de l'Académie de Berlin (séance du 10 août 1848) dont on trouve la traduction au tome XVIII, déjà cité, du présent Journal, notamment de la propriété y mentionnée (page 310) « que les courbes algé» briques s'engendrent par des faisceaux projectifs de courbes d'un » degré inférieur, » il résulte une troisième solution de la question proposée, qui en même temps donne lieu à quelques circonstances intéressantes que nous allons indiquer.

Soit donnée une conique quelconque P^2 située dans le plan de la courbe C^n. Soit C^{n-1} la première polaire relativement à C^n, et P^1 la première polaire relativement à P^2, d'un pôle R pris arbitrairement. Ces polaires se coupent en $(n-1)$ points Q, et les polaires réci-

[*] *Voir* le tome XVIII de ce Journal, page 314.

proques de chacun de ces points Q passent par le pôle R; c'est-à-dire que la $\overline{n-1}^{\text{ième}}$ polaire, par rapport à C^n, et la polaire relative à P^2, qui sont les droites polaires C^1 et P_1^1 de chacun des $\overline{n-1}$ points Q, passent par le pôle R.

Si le pôle R se meut sur une droite donnée G, ses polaires C^{n-1} et P^1 forment deux faisceaux $B(C^{n-1})$ et $B(P^1)$, qui ont respectivement $\overline{n-1}^2$ points fondamentaux C et un point fondamental P, lesquels points sont en même temps les pôles de la droite G par rapport aux bases données C^n et P^2, à savoir G est la $\overline{n-1}^{\text{ième}}$ polaire de chacun des $\overline{n-1}^2$ points C par rapport à C^n, et la polaire de P relativement à P^2.

Supposons que C^{n-1} et P^1, correspondant à un même pôle R, correspondent aussi l'une à l'autre, les faisceaux $B(C^{n-1})$ et $B(P^1)$ seront projectifs et engendreront une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré; c'est-à-dire le lieu des $\overline{n-1}$ points d'intersection Q de deux courbes correspondantes est une courbe Q^n du degré n, qui passe aussi par les $(n-1)^2$ points fondamentaux C et par le point fondamental P des faisceaux.

Appelons Q_1 chacun des n points d'intersection de la courbe Q^n avec la droite G. Ces n points seront entre autres déterminés par une relation métrique, ayant lieu entre eux et les points où la droite G sera coupée par les deux bases C^n et P^2.

Les droites polaires C^1 et P^1 de chacun des points Q de la courbe Q^n par rapport aux bases C^n et P^2 passent par le pôle correspondant R situé sur la droite G (en vertu de la réciprocité mentionnée); conséquemment, si l'on fait passer G à l'infini, toutes ces polaires seront parallèles. Si l'on suppose, en outre, que la conique P^2 est un cercle, les droites C^1 et P^1 sont perpendiculaires à la droite QP, parce que P, comme pôle de G_∞ par rapport au cercle P^2, en est le centre.

La courbe Q^n, lieu des $\overline{n-1}$ points d'intersection Q (dans le cas présent la courbe Q_0^n), est déterminée, dans ces suppositions, seulement par la courbe donnée C^n et le centre donné P du cercle P^2, de la manière suivante :

« Si, dans le plan de la courbe donnée C^n, on prend un point fixe » quelconque P, une autre courbe Q_0^n du degré n sera le lieu d'un

» pôle Q, dont la $\overline{n-1}^{ième}$ polaire C^1 par rapport à la courbe C^n est
» perpendiculaire à la droite QP menée du pôle Q au point fixe P.

» Cette courbe Q_0^n passe notamment par le point P, par les $\overline{n-1}^2$ » pôles C de la droite G_∞, par rapport à la base C^n, et par n points » déterminés Q_1 de la droite G_∞. »

« Si le point P change de position pendant que la base C^n reste » fixe, la courbe Q_0^n changera aussi; cependant elle passera toujours » par les $\overline{n-1}^2$ pôles fixes C et coupera constamment la droite G_∞ » aux mêmes n points invariables Q_1, de sorte que ses asymptotes » conservent des directions constantes, et restent parallèles à elles- » mêmes. (Ces points Q_1 restent invariablement les mêmes sur la » droite G_∞, en vertu du théorème de M. Poncelet, *que tous les* » *cercles dans un même plan ont pour sécante commune idéale la* » *droite à l'infini.*) »

« La courbe Q_0^n ainsi déterminée coupe la base donnée C^n en » n^2 points Q_0; la polaire C^1 de chacun de ces points est en même » temps tangente à la base en ce point; par conséquent la droite Q_0P » en est normale. Il s'ensuit donc que de chacun des points P on » peut mener n^2 normales PQ_0 à la base C^n. »

En considérant ces circonstances dans leur totalité, on peut énoncer le théorème suivant :

« De chaque point P dans le plan d'une courbe donnée C^n du de- » gré n on peut mener n^2 normales à la courbe; les n^2 pieds Q_0 de » ces normales et le point P sont toujours situés sur une autre courbe » déterminée Q_0^n du degré n.

» Autant il y a de points dans le plan, autant il y a de courbes, » parce qu'à chaque pôle P correspond une courbe particulière Q_0^n. » Toutes ces courbes Q_0^n ont $\overline{n^2-n+1}$ points déterminés fixes com- » muns entre elles : à savoir les $\overline{n-1}^2$ pôles C de la droite G_∞, par » rapport à la base C^n, et n autres points déterminés Q_1 situés sur » cette droite. Les asymptotes de toutes les courbes Q_0^n sont dirigées » conséquemment vers les mêmes n points Q_1. »

Et réciproquement :

« Chaque courbe du $n^{ième}$ degré passant par les $\overline{n^2-n+1}$ points

» C et Q_1 est une des courbes Q_0^n, et coupe la base donnée en n^2 » points Q_0 tels que les normales en ces points se coupent au point P » de la courbe, qui en est le pôle correspondant. Celles de toutes les » courbes Q^n, qui passent par un même point quelconque Q, for- » ment un faisceau de courbes $B(Q_0)$ dont les n^2 points fondamen- » taux sont donnés par les $n^2 - n + 1$ points C et Q_1, par le point » donné Q et par $n - 2$ autres points déterminés (Q), qui se trouvent, » avec le point Q, sur une même droite L menée de ce point perpen- » diculairement à sa droite polaire C^1. »

« Ces $\overline{n-2}$ nouveaux points Q déterminent le même faisceau » $B(Q_0^n)$ de courbes, et les droites polaires C^1 de ces points sont » toutes perpendiculaires à la droite L. Sur cette droite se trouvent » aussi les pôles P correspondants aux courbes du faisceau $B(Q_0)$, de » sorte que le $n^{ième}$ point d'intersection, où chacune de ces courbes » rencontre la droite L, outre les $\overline{n-1}$ points d'intersection Q, est » précisément son pôle P. »

Les $\overline{n-1}$ courbes Q_0^n, dont les pôles coïncident avec les $\overline{n-1}$ points Q, touchent la droite L en ces points. Si l'on mène de chaque pôle P la tangente T à la courbe correspondante Q_0^n, la courbe enveloppe de toutes ces tangentes sera de la classe n et sera touchée $\overline{n-1}$ fois par la droite L.

Les $\overline{n-1}$ points Q et les $\overline{n-1}^2$ pôles fixes se trouvent toujours sur une même courbe C^{n-1} du degré $\overline{n-1}$. Cette courbe sera la première polaire par rapport à la base C^n d'un point à l'infini situé sur la droite polaire C^1 de chacun des $\overline{n-1}$ points Q.

Nous avons encore le théorème réciproque :

« Si plusieurs pôles P sont situés sur une droite quelconque L, » leurs courbes correspondantes Q_0^n se couperont en $\overline{n-1}$ points dé- » terminés Q sur cette même droite, etc. »

« Si l'une des courbes Q_0^n doit passer par deux points donnés Q, » elle sera déterminée, en général, d'une manière absolue; car les » perpendiculaires L abaissées des deux points Q sur leurs droites » polaires C^1 se coupent au pôle P de la courbe en question. »

On peut encore compléter ce théorème.

La base donnée C^n est coupée par la droite G_∞ en n points A. Qu'on se représente toutes les courbes possibles du degré n, qui ont avec la courbe C^n un contact de l'ordre $(n-1)$ en chacun des n points A, on aura un faisceau de courbes $B(C^n)$, dont les n^2 points fondamentaux ne se trouvent que sur les n points A. De même, la droite G_∞, envisagée comme l'ensemble de n droites, pourra être regardée comme faisant partie de ce faisceau. Toutes ces courbes ont les n^2-n+1 points C et Q_1, mentionnés ci-dessus, communs entre elles; et les droites polaires C^1, correspondant à chaque pôle Q par rapport à toutes les courbes, sont parallèles entre elles.

De là nous tirons le théorème suivant :

« Si, d'un pôle quelconque P, on mène des normales à toutes les » courbes du faisceau particulier $B(C^n)$ (c'est-à-dire n^2 normales PQ_0 » à chacune de ces courbes), les pieds Q_0 de ces normales formeront » une courbe Q_0^n, de sorte que chacune des droites menées par le » pôle P est normale à $\overline{n-1}$ des courbes données $B(C^n)$. »

Réciproquement :

« Toute courbe Q_0^n du degré n, qui passe par les n^2-n+1 points » fixes C et Q_1, coupera la courbe donnée $B(C^n)$ en des points Q_0 » tels, que les normales à la courbe $B(C^n)$ en ces points se réunissent » dans un même point P, situé sur la courbe transversale Q_0^n. Les » tangentes T que l'on peut mener aux courbes données $B(C^n)$ par » les points Q_0, enveloppent une courbe T^{2n-1} de la classe $\overline{2n-1}$, » n fois touchée par la droite G_∞. »

Une application des théorèmes énoncés aux cas les plus simples, ne sera pas sans intérêt.

Supposons $n=2$; la base donnée C^n, ainsi que chacune des courbes Q_0^n, sera une section conique.

Dans ce cas-là, les $\overline{n-1}^2$ pôles C se réduisent à un seul, centre de C^2, et les n points Q_1 sur la droite G_∞ deviendront deux points Q_1 situés à l'infini sur les deux axes X et Y de la base C^2. Chacune des courbes Q_0^2 devant passer par ces deux points, elles seront toutes des hyperboles équilatères, dont les asymptotes sont parallèles aux axes X, Y de la base C^2.

De là les théorèmes particuliers suivants, dont quelques-uns sont déjà connus.

« Par tous les points P situés dans le plan d'une conique donnée C^2 » passent quatre normales PQ_0 (réelles ou imaginaires) à la conique. » Les quatre pieds Q_0, le centre C de la conique, et les deux points » $2Q_1$ à l'infini des deux axes X et Y, enfin le pôle P sont situés sur » une hyperbole équilatère Q_0^2; toutes les hyperboles équilatères Q_0^2, » correspondant à tous les points P, ont trois points communs entre » elles, C et $2Q_1$; les asymptotes de ces hyperboles sont parallèles » aux axes X, Y, en vertu des points $2Q_1$. »

Réciproquement :

« Toute hyperbole équilatère, qui passe par le centre C_1 et par les » deux points à l'infini $2Q_1$ des axes de la conique donnée, coupe » celle-ci en quatre points, dont les normales correspondantes se » réunissent toujours en un point quelconque sur cette même hyper- » bole. Si le pôle P se meut sur une droite donnée L, l'hyperbole » équilatère correspondante Q_0^2 passe constamment par un point » déterminé Q sur la même droite. »

Réciproquement :

« Toutes les hyperboles équilatères qui passent en même temps » par les trois points C et $2Q_1$, ainsi que par un quatrième point » donné Q, en formant un faisceau $B(Q_0^2)$, ont les pôles P sur une » même droite L, qui passe par le point Q, et qui est perpendiculaire » à la polaire C^1 de ce point.

» L'hyperbole Q_0^2 sera déterminée par deux points donnés Q; les » perpendiculaires L menées par ces points aux polaires respectives » C^1 se couperont au pôle P. »

« Au lieu de la base C^2, considérons un faisceau particulier $B(C^2)$ » de coniques qui se touchent en deux points (réels ou imaginaires) A » sur la droite G_∞; ou bien, considérons toutes les coniques sem- » blables, semblablement placées, et concentriques à la conique don- » née C^2, et sur ces coniques abaissons d'un pôle P des normales : » tous les pieds Q_0 de ces normales formeront l'une des hyperboles » équilatères Q_0^2. »

Et réciproquement :

« Toute hyperbole équilatère, passant par les trois points C et $2Q_1$,
» coupera aussi toutes les coniques données $B(C^2)$ en des points Q,
» tels que les normales correspondantes se rencontrent en un seul et
» même point P de la même hyperbole. »

« Si particulièrement le pôle P_s d'où l'on a abaissé les normales
» aux courbes $B(C)^2$, se trouve sur l'un des deux axes communs X,
» Y, l'hyperbole équilatère correspondante se transforme en deux
» droites dont l'une est cet axe lui-même, et dont l'autre lui est per-
» pendiculaire. De même, Q_0^2 sera transformée en deux droites, si le
» pôle P est situé sur la droite G_∞; l'une de ces deux droites sera G_∞,
» l'autre passera par le centre C. »

M. Poncelet a, le premier, donné la partie la plus essentielle de ces propriétés des sections coniques [*].

Le théorème suivant se rattache intimement aux théorèmes précédents :

« Si l'on mène des tangentes T à la base C^2 par les pieds Q_0 des
» quatre perpendiculaires abaissées d'un point P sur cette base, ces
» tangentes, ainsi que les deux axes X, Y, toucheront une parabole,
» dont la directrice passe par le centre C de la base. »

Et réciproquement :

« Chaque parabole qui touche les deux axes de la base donnée C^2,
» a quatre tangentes T communes avec cette base; elles toucheront
» celle-ci en quatre points Q_0 dont les normales respectives passent
» toujours par un même point P. A chacun des points P du plan cor-
» respondra une parabole déterminée, qui est tangente aux deux
» axes X et Y, et réciproquement. »

« Si le point P se meut sur une droite L, la parabole correspon-
» dante touchera toujours une autre droite déterminée, et récipro-
» quement. »

Si, particulièrement, le point P se trouve sur la développée de la base C^2, la parabole touchera cette base, et réciproquement.

---

[*] Voir le *Traité des propriétés projectives des figures*, page 228, article 492.

II.

Toutes les normales d'une courbe C_0 sont tangentes à une autre courbe E_0, qu'on nomme développée.

Nous avons trouvé par les considérations précédentes la classe de la développée E_0; elle sera marquée par le nombre n^2, si la base donnée est du degré n. Les rapports particuliers qui existent entre ces deux courbes, donnent lieu à des réciprocités entre leurs éléments, notamment entre leurs tangentes et leurs points singuliers. Les voici :

a. A chaque point d'inflexion de la base C^n correspond un point à l'infini de la développée E_0, ou la normale au point d'inflexion de la base C^n est asymptote de la développée, et réciproquement.

Ainsi la développée aura autant d'asymptotes droites, ou bien, elle coupera la droite G_∞ en autant de points B que la base aura de points d'inflexion; en général, il y en aura $3n(n-2)$.

b. A chacun des n points A à l'infini de la base C^n correspond un point de rebroussement R sur la développée E_0 situé à l'infini sur la droite G_∞. Cette droite est la tangente de rebroussement de la courbe E_0, de sorte qu'elle est n fois tangente de rebroussement de la développée E_0, et qu'elle a trois points communs avec la courbe en chaque point R. Les tangentes à la base aux n points A en sont les asymptotes; les points de rebroussement R se trouvent sur les droites perpendiculaires aux asymptotes, c'est-à-dire les perpendiculaires menées d'un point quelconque aux asymptotes passent par les points de rebroussement correspondants R de la développée, situés sur la droite G_∞. La droite G_∞ ayant trois points communs avec la courbe E_0 en chacun des n points R, et étant coupée par cette courbe en $3n(n-2)$ points, ces deux lignes, la droite et la courbe, ont

$$3n + 3n(n-2) = 3n(n-1)$$

points communs entre elles. Donc la développée sera du degré $3n(n-1)$.

c. A chaque sommet S de la base C^n (c'est-à-dire à chacun des points de la base C^n, où elle a avec un cercle un contact du troisième ordre) correspondra également un point de rebroussement R de la développée E_0, et réciproquement.

Il s'ensuit que les n points A mentionnés ci-dessus peuvent être considérés comme des sommets S, qui toutefois présentent cette particularité, que le cercle correspondant, qui a avec la courbe un contact du troisième ordre, est décrit avec un rayon infiniment grand, et est formé par l'asymptote correspondante regardée comme double.

d. Une droite étant normale à la base C^n en deux points différents (normale double à la base), est aussi tangente double de la développée E_0, et réciproquement.

La droite G_∞ est n fois tangente à la développée E_0 (b); donc, en cas de besoin, elle peut être regardée comme étant n fois normale à la base C^n.

e. Un point d'inflexion de la développée E_0 correspond à un point de rebroussement de la base C^n, et réciproquement. Si cependant la base est une courbe générale du degré n, sans aucune autre détermination, elle n'a aucun point de rebroussement, et, dans ce cas, la développée E_0 n'aura pas non plus de points d'inflexion proprement dits.

A l'aide des formules contenues dans le compte rendu précité, nous tirons des considérations précédentes le théorème suivant :

La développée E_0 d'une courbe générale C^n du degré n est :

$$\text{Du degré } 3n(n-1) \text{ et de la classe } n^2; \tag{1}$$

elle n'a pas, en général, de points d'inflexion, elle a seulement

$$3n(n-2) \tag{2}$$

asymptotes rectilignes, qui en même temps sont les normales à la base C^n aux points d'inflexion; les $3n$ autres asymptotes de la développée coïncident avec la droite G_∞ à l'infini. Cette droite est n fois tangente de rebroussement de la développée; les n points de rebroussement R se trouvent sur les directions perpendiculaires aux asymptotes de la base C^n. En somme, la développée E_0 a

$$3n(2n-3) \tag{3}$$

points de rebroussement R_1 et R; car elle a, outre les n points R, dont il vient d'être question, encore $2n(3n-5)$ points de rebroussement, centres des cercles qui ont avec la base un contact du troisième ordre aux points correspondants S. Donc la base donnée C^n a

$$(4) \qquad 2n(3n-5)$$

sommets S, où elle a un contact du troisième ordre avec une courbe à rayon fini.

La développée E_0 a de plus

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$$

tangentes doubles; ou, la base a autant de normales doubles. Il faut remarquer que la droite G_∞ a été comptée ici $\frac{1}{2}n(n-1)$ fois, de sorte qu'en en faisant abstraction, on aura seulement

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-4)$$

tangentes doubles de la développée, ou autant de normales doubles de la base.

Si l'on suppose que la base donnée est du deuxième ou du troisième degré, on tire du théorème précédent les propriétés suivantes :

A. La développée E_0 d'une section conique C^2 est une courbe de la quatrième classe et du sixième degré (1); elle n'a pas de points d'inflexion proprement dits ni d'asymptotes (2); mais elle a la droite G_∞ pour tangente double de rebroussement (3), et six points de rebroussement, à savoir $2R$, sur G_∞ et $4R$ centres de quatre cercles qui ont avec la section conique C^2 aux quatre sommets un contact du troisième ordre.

Cette développée E_0 a trois tangentes doubles, qui sont à la fois normales doubles à la base C^2 (5), à savoir la droite G_∞ et les deux axes X, Y (6) de la conique. En tant qu'on peut considérer la droite G_∞ comme un axe de la conique, celle-ci a trois axes qui sont tangentes doubles de E [*]. Ici cependant X et Y ne sont pas des tangentes

[*] La droite G_∞ se présente aussi dans la considération générale des foyers de la conique C^2, comme troisième axe de cette conique, parce que C^2 a trois couples de foyers situés sur les trois axes X, Y et G_∞ correspondants, lesquels foyers ne sont réels que sur un seul axe, et imaginaires sur les deux autres axes.

doubles de E_0 dans le sens ordinaire; ces axes sont, comme G_∞, des tangentes doubles de rebroussement à deux points correspondants des quatre points R, de sorte que les sommets de ces axes X, Y sont les quatre sommets de la courbe C^2.

On peut exprimer d'une manière plus précise ce qui vient d'être dit.

Les trois axes X, Y et G_∞ de la conique C^2 sont à la fois les axes de la développée E_0 de la conique; ils sont normales doubles de C^2 et tangentes doubles de rebroussement de E_0; leurs trois couples de sommets (4S et 2A) sont les points de contact de C^2 avec des cercles qui ont en ces points avec la conique un contact du troisième ordre; les trois couples de points de rebroussement situés sur les axes (4R et $2R_1$) sont les centres de ces cercles; les deux points de rebroussement et les deux sommets sont imaginaires sur l'un des trois axes et réels sur les deux autres; les points $2R_1$ sur l'axe G_∞ sont situés sur les directions perpendiculaires aux asymptotes de C^2.

B. La développée d'une courbe générale du troisième degré C^3 est une courbe de la neuvième classe et du dix-huitième degré (1); elle n'a que neuf asymptotes, dont trois sont imaginaires et six réelles; mais la droite G_∞ en est tangente triple de rebroussement, remplaçant ainsi les neuf asymptotes manquantes; elle (la courbe E_0) a, outre les trois points de rebroussement R_1 situés sur G_∞, encore vingt-quatre points de rebroussement R. Par rapport à ces vingt-quatre points la base C^3 a vingt-quatre sommets S (4), où elle est touchée par vingt-quatre cercles ayant pour centres les points R. Enfin la courbe E_0 a, outre la droite G_∞, encore vingt-quatre tangentes doubles, qui en même temps forment la totalité des normales doubles de C^3 (6), etc. La base C^3 étant de la classe $3.2 = 6$, elle a, en tout, $6.9 = 54$ tangentes T communes avec sa développée E_0.

Ainsi nous disons :

« La courbe générale du troisième degré C^3 a cinquante-quatre » normales T qui en même temps lui sont tangentes. »

C'est-à-dire une telle ligne T est normale à la courbe en un point, et tangente en un autre.

Appelons U la tangente à la courbe au point Q; alors l'angle droit

(TU) est circonscrit à la courbe, son sommet Q est situé sur cette courbe, et est le point de contact avec l'un des deux côtés.

« Il y a cinquante-quatre autres points Q_1 sur la courbe C^3, qui » peuvent être lieux du sommet d'un angle droit circonscrit à la » courbe, pendant que celle-ci est touchée par les côtés de l'angle » en d'autres points. »

Ce théorème vient de cet autre :

« Le lieu des sommets de tous les angles droits (TU) circonscrits à » la courbe C^3 est une courbe du trente-sixième degré [*], et les

$$3.36 = 108$$

» points d'intersection mutuelle des deux courbes sont donnés par » les cinquante-quatre points Q et les cinquante-quatre points Q_1. »

« Si le sommet d'un angle droit donné (TU) se meut sur la base » donnée C^3, pendant que l'un des deux côtés, U, touche continuel- » lement cette courbe, l'autre côté T décrit comme tangente une » courbe T^{18} de la dix-huitième classe et du trente-troisième degré, » qui a neuf asymptotes communes avec la développée E_0 de la base; » ses vingt-quatre autres asymptotes coïncident avec la droite G_∞ qui » est douze fois tangente de T^{18} aux trois points de rebroussement R_1 » de la développée E_0, où elle est touchée par quatre branches de la » courbe T^{18}. »

En ayant égard aux propriétés de la courbe $\mathfrak{S}^9$ (*voir* le tome XVIII de ce Journal, page 325), on peut énoncer le théorème suivant :

« La courbe C^3 du troisième degré a en tout trente-trois normales » qui la coupent au pied Q et en deux autres points A et B, tels que » les tangentes à ces points soient parallèles. »

---

[*] Le théorème général est :

« Le lieu des sommets de tous les angles droits circonscrits à une courbe donnée de » la classe K est une courbe du degré K^2. »

La contradiction, qui se trouve entre ce théorème et le théorème connu sur la section conique, n'est qu'apparente.

III.

Sur les normales qu'on peut mener d'un point à une surface algébrique.

Le nombre des normales qu'on peut mener d'un point quelconque à une surface donnée du degré n, peut être trouvé par une méthode analogue à celle qui vient d'être appliquée (§ I) aux courbes. Notamment le procédé du § I, 3°, donne des résultats intéressants, que nous allons indiquer brièvement.

1°. Deux courbes C^n et D^p des degrés n et p, situées dans un même plan, ont, en général,

$$(n+p-2)^2-(n-1)(p-1)$$

couples de pôles Q et de droites polaires L^1 communs, c'est-à-dire tel est dans un plan le nombre de pôles Q_1 dont les $\overline{n-1}^{\text{ièmes}}$ et les $\overline{p-1}^{\text{ièmes}}$ polaires, par rapport aux bases C^n et D^p, coïncident sur une même droite $C^1 D^1 = L^1$.

Si, en particulier, on a $p=2$, et que, par conséquent, $D^p = D^2$ soit une section conique, le nombre des pôles Q_1 se réduit à n^2-n+1; et il sera le même si la conique devient un cercle réel ou imaginaire.

2°. Il y a pour chaque plan E, $\overline{n-1}^3$ pôles différents F qui lui correspondent par rapport à une surface F^n du degré n, c'est-à-dire ce plan est la $\overline{n-1}^{\text{ième}}$ polaire, ou le plan polaire de chacun de ces pôles par rapport à la surface.

A chaque pôle Q correspond un seul plan polaire F^1, mais il existe $\overline{n-1}^3$ pôles différents Q qui correspondent à ce même plan.

Désignons par F_0 les $\overline{n-1}^3$ pôles relatifs au plan E_∞ à l'infini. En vertu des théorèmes auxiliaires et des déterminations qui précèdent, nous énoncerons de la manière suivante les résultats annoncés ci-dessus :

« Le lieu d'un pôle Q dont le plan polaire F^1, par rapport à une » surface donnée F^n du degré n, est perpendiculaire à la droite QP » qui joint Q à un point fixe P, choisi arbitrairement, ce lieu, dis-je,

» est une courbe à double courbure du degré $\overline{n^2 - n + 1}$, soit
» Q^{n^2-n+1}, qui passe aussi par le point fixe P, et qui a pour tangente
» en ce point la perpendiculaire abaissée du point P sur son plan po-
» laire. Pour les pôles Q_0, où cette courbe Q^{n^2-n+1} perce la surface
» donnée, le plan polaire correspondant F_0^1 devient le plan tangent à
» la surface F^n en ce point, et ainsi la droite PQ_0 est la normale cor-
» respondante. Par conséquent, par chaque point P passent, en gé-
» néral, $n(n^2 - n + 1)$ normales PQ_0 à la surface F^n, dont les
» $n(n^2 - n + 1)$ pieds Q_0 sont situés, avec le point P, sur la courbe
» à double courbure du $\overline{n^2 - n + 1}^{\,ième}$ degré. »

« Cette courbe Q^{n^2-n+1} passe aussi par les $\overline{n-1}^3$ pôles F_0 du plan
» E_∞ à l'infini, ainsi que par $n^2 - n + 1$ points déterminés Q_1 dans
» ce plan. Ces points Q_1 sont, en vertu du théorème auxiliaire (1^o) les
» pôles communs des deux courbes C_∞^n et D_∞^2 formées par l'intersec-
» tion du plan E_∞ avec la surface donnée F^n et avec une sphère F^2 :
» D_∞^2 est donc un cercle imaginaire [*].

» Toutes les courbes Q^{n^2-n+1}, correspondant de cette manière à tous
» les points P, passent par les $\overline{n-1}^3$ pôles fixes F_0 et par les
» $\overline{n^2 - n + 1}$ points Q_1 ; les asymptotes de toutes les courbes sont
» toutes dirigées vers ces derniers points à l'infini ; donc les asymp-
» totes de chacune des courbes seront parallèles aux asymptotes de
» toutes les autres. »

Les droites menées d'un point quelconque Q, pris sur la courbe Q^{n^2-n+1}, à tous les autres points de cette courbe sont sur une surface conique du degré $n(n-1)$, dont le sommet (centre) est Q.

On peut dire, par conséquent :

« Les $n(n^2 - n + 1)$ normales PQ_0 abaissées d'un point P sur la
» surface donnée F^n, ainsi que les $\overline{n-1}^3$ droites PF_0 et les $n^2 - n + 1$
» droites PQ_1 menées du point P aux points fixes F_0 et Q_1, toutes ces
» $n(2n^2 - 3n + 3) + 1$ droites, dis-je (y compris la perpendiculaire
» du point P à son plan polaire), sont sur une même surface conique
» du $n(n-1)^{ième}$ degré. »

---

[*] D'après un théorème de M. Poncelet, toutes les sphères F^2 ont un même cercle imaginaire D_∞^2 commun avec le plan E_∞.

« De même, toutes les droites menées de l'un des points Q_0, F_0 et Q_1
» à tous les autres et à P, sont sur une même surface conique du
» $n(n-1)^{ième}$ degré, qui se change cependant pour les points Q_1 en
» une surface cylindrique du même degré. »

On peut compléter ce théorème d'une manière semblable à celle du § I, 3°.

Imaginons toutes les surfaces du degré n qui ont avec la surface donnée F^n, suivant sa courbe d'intersection C_∞^n avec le plan E_∞, un contact de l'ordre $n-1$, ou imaginons le faisceau $B(F^n)$ déterminé par la surface donnée et par le plan E_∞ considéré comme l'ensemble de n plans, de sorte que la courbe fondamentale du faisceau est la courbe C_∞^n prise n fois : et nous verrons que toutes ces surfaces $B(F^n)$ ont les $\overline{n-1}^3$ pôles F_0 du plan E_∞, ainsi que les n^2-n+1 points Q_1 situés dans ce plan, communs entre elles; les plans polaires F^1, correspondant à chaque pôle Q, sont parallèles les uns aux autres. Il s'ensuit :

« Si, d'un point arbitraire P on mène des normales à toutes les
» surfaces de ce faisceau $B(F^n)$ (ce qui donne $n(n^2-n+1)$ nor-
» males PQ_0 pour chaque surface), toutes ces normales seront sur
» une même surface conique du $n(n-1)^{ième}$ degré, et leurs pieds Q_0
» seront sur une courbe à double courbure Q^{n^2-n+1} du $(n^2-n+1)^{ième}$
» degré, qui passe par les $n(n^2-2n+2)$ points F_0 et Q_1. »

« Si l'on transporte le point P à l'infini, dans le plan E_∞, la surface
» conique et la courbe à double courbure Q^{n^2-n+1} se décomposent en
» des parties déterminées. »

Nous faisons observer, relativement au théorème précédent, que, pour le cas où la surface F^n est du deuxième degré, F^2, M. Terquem a démontré le premier que « par chaque point P on peut mener à la
» surface six normales, toujours situées sur une même surface conique
» du deuxième degré [*]. »

Conformément à ce qui vient d'être dit, nous pouvons compléter ce théorème comme il suit :

---

[*] *Voir* le présent Journal, tome IV, page 175. Nous nous empressons d'ajouter que le théorème de M. Terquem est plus général. Il a démontré que par un point donné on peut mener m^3-m^2+m normales à une surface algébrique du degré m.

« Au plan E_∞ correspond, dans ce cas, un seul pôle F_0 [puisque » $(2-1)^3=1$], qui est le centre de la surface F^2; les n^2-n+1 points Q_1 » sur E_∞ se réduisent à trois points Q_1, à savoir les points à l'infini » des axes X, Y, Z de la surface F^2. »

Donc, l'énoncé complet du théorème sera :

« D'un point quelconque P on peut mener six normales PQ_0, réelles » ou imaginaires, à une surface donnée F^2 du deuxième degré; les six » pieds Q_0, le point P, le centre F_0 de la surface et les trois points Q_1 » à l'infini sur les trois axes de la surface sont toujours situés en- » semble sur une courbe à double courbure Q^3 du troisième de- » gré [*]; toutes les courbes Q^3 ainsi déterminées ont les quatre » points F_0 et $3Q_1$ communs, de sorte que leurs asymptotes, eu égard » aux trois points Q_1, ont les mêmes directions constantes et paral- » lèles aux trois axes de la surface; pour chaque point P les six nor- » males PQ_0, la droite passant par le centre F_0, les trois droites menées » aux trois points Q_1 (parallèles aux trois axes), et la perpendiculaire » abaissée du point P sur son plan polaire (donc, onze droites passant » par P), sont ensemble sur une surface conique du deuxième degré; » de même, les dix droites menées du centre F_0 ou de l'un des six » pieds Q_0 aux autres dix points déterminés sont sur une surface co- » nique du deuxième degré. Particulièrement, les droites menées de » l'un des trois points Q_1 aux autres dix points, ou les huit droites » menées par les huit points P, F_0 et $6Q_0$ parallèlement à l'un des » trois axes, sont sur un même cylindre hyperbolique équilatère; » c'est-à-dire si l'on projette les huit points P, F_0 et $6Q_0$ sur un plan » perpendiculaire à l'un des trois axes, dans une direction parallèle » à cet axe, les huit points nouveaux se trouvent sur une même hy- » perbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux deux » autres axes. »

« Par chaque point donné Q passe un nombre infini de courbes à » double courbure Q^3; leurs pôles correspondants P se trouvent tous » sur la perpendiculaire abaissée du point Q sur son plan polaire F. »

« Étant donné un faisceau particulier B (F^2) de surfaces du deuxième » degré, qui se touchent les unes les autres suivant une conique C^2_∞

[*] La courbe à double courbure du troisième degré est déterminée par six points

» située dans le plan E_∞ (ou, pour employer les expressions de » M. Poncelet, étant donné un système de surfaces semblables, sem» blablement placées et concentriques du deuxième degré), si l'on » abaisse d'un point P des normales PQ_0 sur les surfaces (six sur cha» cune), leurs pieds seront tous sur une même courbe à double cour» bure Q^3 du troisième degré, qui passe toujours par le centre F_0 des » surfaces et par les trois points à l'infini Q_1 de leurs axes communs » X, Y, Z, auxquels par conséquent les asymptotes de Q^3 sont paral» lèles.

» De plus, la totalité des normales PQ_0 (y compris les droites » menées du point P au centre F_0 et celles menées aux trois points Q_1 » et conséquemment parallèles aux trois axes) se trouve toujours sur » une même surface conique F_0^2 du deuxième degré. »

Si le pôle P se trouve dans l'un des plans des axes XY, XZ ou YZ, la courbe Q^3 se décompose dans une section conique Q^2 située dans ce plan et dans une droite Q^1 perpendiculaire au plan ; conséquemment le cône F_0^2 se décompose dans deux plans, dont l'un est le plan des axes en question, tandis que l'autre est perpendiculaire à ce plan et passe par P et la droite Q^1.

Si, enfin, le pôle P se trouve sur l'un des trois axes X, Y, Z, la courbe Q^3 se change en trois droites, l'une étant l'axe lui-même, les deux autres étant perpendiculaires à cet axe et parallèles respectivement aux deux autres axes. La surface conique F_0^2 est alors formée par deux des plans des X, Y, Z.

Il en est pareillement, si le pôle P est situé dans le plan E_∞ ou sur l'une des droites X_1, Y_1, Z_1, qui sont les lignes d'intersection du plan E_∞ avec les plans des axes XY, YZ, XZ ; car sous ce rapport, ainsi que sous quelques autres points de vue, le plan E_∞ peut être considéré comme quatrième plan des axes, et l'on aura un tétraèdre formé par ces quatre plans, dont les six arêtes X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 peuvent être considérées comme les axes des surfaces données $B(F^2)$.

Errata pour le Mémoire de M. *Steiner* inséré au tome XVIII de ce Journal : *Page* 309, *formule* (3), *au lieu de* $3g(g-1)$, *lisez* $3g(g-2)$; *page* 321, *ligne* 17, *au lieu* de six, *lisez* vingt-quatre; *page* 335, *ligne* 6, *au lieu de* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, *lisez* $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$.

Note sur le Traité des nombres carrés, *de* Léonard de Pise, *retrouvé et publié par M. le prince* Balthasar Boncompagni ;

Par M. WOEPCKE.

Dans une Note précédente, relative au *Flos* de Léonard de Pise, nous avons essayé d'expliquer brièvement quelle est l'importance des ouvrages de cet auteur pour l'histoire des sciences. Nous y avons pu citer une discussion, contenue dans le *Flos,* comme une preuve du haut intérêt présenté par la publication de M. le prince Boncompagni, qui nous offre le texte original de deux ouvrages de Fibonacci, entièrement inconnus auparavant, ainsi que du *Traité des nombres carrés,* qu'on avait tant regretté de devoir considérer comme perdu.

Plus on examine les ouvrages du géomètre de Pise, plus on reconnaît que, tout en étant le disciple des Arabes, dont il résume jusqu'à un certain point les travaux, il sait apporter une originalité remarquable dans la manière de traiter les questions qu'il emprunte à leur science.

C'est ainsi qu'il a été possible de constater que les énoncés de toute une série de problèmes contenus dans son *Traité de l'Abacus* se retrouvent presque textuellement dans un ouvrage d'Alkarkhî, algébriste arabe vivant au commencement du XIe siècle, mais que les solutions de Léonard de Pise diffèrent, pour la plupart, plus ou moins essentiellement de celles de l'auteur arabe [*].

Le *Traité des nombres carrés* nous montre Fibonacci encore plus indépendant de ses maîtres. On ne rencontre dans ce Traité qu'un seul exemple d'une méthode empruntée aux Arabes. C'est lorsque, pour

[*] Voir *Extrait du Fakhrî,* par F. Woepcke. Paris, 1853. Pages 24 à 29.

faire simultanément

$$x^2 + mx = z^2, \quad x^2 - mx = t^2,$$

il résout d'abord l'égalité double

$$x_1^2 + y_1 = z_1^2, \quad x_1^2 - y_1 = t_1^2,$$

et satisfait ensuite aux équations proposées en posant

$$x = \frac{mx_1}{y_1} x_1, \quad z = \frac{mx_1}{y_1} z_1, \quad t = \frac{mx_1}{y_1} t_1.$$

Ce procédé se trouve, à une légère modification près, dans le Traite d'Alkarkhî, qui paraît en être l'inventeur [*].

Le moyen principal et presque unique employé par Fibonacci pour résoudre les problèmes indéterminés du second degré dont il s'occupe [**], est tout à fait original, et ne se trouve ni chez Diophante, ni chez les Indiens, ni chez les Arabes. C'est une étude très-approfondie des suites formées par la succession des carrés des nombres naturels et des nombres impairs, ainsi que des différences de ces suites.

De là résulte immédiatement une différence essentielle entre l'analyse indéterminée de Diophante et celle de Fibonacci : c'est que le premier ne se préoccupe que d'obtenir des solutions rationnelles, tandis que le second résout la plupart de ses problèmes *en nombres entiers*.

On peut ajouter que, si Diophante mérite notre admiration surtout par l'habileté extrême avec laquelle il sait éluder les difficultés que présentent les problèmes en apparence les plus ardus, ou par les artifices ingénieux qu'il invente pour arriver à leur solution, Fibonacci,

---

[*] Voir *Extrait du Fakhrî*, page 13, nº 4; page 24, ligne 6; page 112, ligne 2.

[**] Voici le tableau de ces problèmes :

1°. $x^2 + y^2 = z^2$;

2°. $x^2 + y^2 = c^2$;

3°. $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$;

4°. $\begin{cases} x^2 + y = z^2, \\ x^2 - y = t^2; \end{cases}$

5°. $\begin{cases} x^2 + 5 = z^2, \\ x^2 - 5 = t^2; \end{cases}$

6°. $\begin{cases} x^2 + mx = z^2, \\ x^2 - mx = t^2; \end{cases}$

7°. $\dfrac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2} = \dfrac{b}{a}$;

8°. $\begin{cases} x^2 + y^2 = u^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = v^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = w^2, \\ \text{etc.}; \end{cases}$

9°. $\begin{cases} x + y + z + x^2 = u^2, \\ x + y + z + x^2 + y^2 = v^2, \\ x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2. \end{cases}$

au contraire, aime à aborder ces difficultés de front, et à résoudre la question par un examen direct de la nature du problème, méthode souvent bien moins élégante, mais exigeant peut-être une plus grande tension de l'esprit.

Ce qui fait plus d'honneur encore à Fibonacci, c'est de s'être rencontré avec Fermat, en énonçant qu'un carré ne peut pas être *nombre congruent*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas faire simultanément

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 = t^2.$$

Cela revient à dire que la différence de deux quatrièmes puissances ne peut pas être un carré, ce qui est le célèbre théorème énoncé et démontré par Fermat [*]. Malheureusement la démonstration de Fibonacci est incomplète. Car, ayant exposé que le *nombre congruent*, c'est-à-dire le nombre u qui fait simultanément

$$x^2 + u = z^2 \quad \text{et} \quad x^2 - u = t^2,$$

est de la forme

$$4.\alpha.\beta.(\alpha+\beta)(\alpha-\beta),$$

il se borne à démontrer qu'on ne peut pas avoir

$$\alpha : \beta = (\alpha+\beta) : (\alpha-\beta),$$

tandis qu'il reste à prouver qu'on ne peut pas avoir non plus

$$\alpha : (\alpha+\beta) = (\alpha-\beta) : \beta,$$

et surtout que les quatre facteurs α, β, $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ ne peuvent pas tous à la fois être séparément des carrés, ce qui nous fait retomber dans le théorème qu'il s'agit de démontrer. Mais avoir énoncé une si belle proposition, est assez déjà pour la gloire de Léonard de Pise, et l'on ne doit pas lui faire un reproche de ce qu'il n'a pas

[*] *Voir* l'observation ajoutée au 20e des problèmes placés par Bachet à la suite de la 26e proposition du VIe livre de Diophante (DIOPHANTI ALEXANDRINI *Arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis Liber unus; cum commentariis* C. G. Bacheti, V. C., *et observationibus* D. P. de Fermat, senatoris Tolosani. Tolosæ, 1670; page 338): « Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus;... si area trianguli » esset quadratus, darentur duo quadrato-quadrati quorum differentia esset quadra- » tus, etc. »

réussi à trouver une démonstration que Fermat lui-même considérait comme une de ses découvertes les plus importantes et les plus difficiles [*].

Citons en revanche une autre proposition intéressante, énoncée et parfaitement démontrée par Léonard de Pise, savoir que l'expression $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ peut être décomposée en deux carrés de deux manières différentes [**]. Il se sert de ce théorème pour résoudre l'équation

$$x^2+y^2=a^2+b^2\,[***],$$

[*] *Loc. laud.* : « Hujus theorematis a nobis inventi demonstrationem quam et ipsi » tandem non sine operosâ et laboriosâ meditatione deteximus, subjungemus. Hoc » nempe demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus. »

[**] *Tre scritti inediti*, page 66 : « Si quatuor numeri non proportionales proponan- » tur, et sit primus minor secundo, et tertius minor quarto, et aggregatus ex qua- » dratis primi et secundi multiplicetur per aggregatum quadratorum tertii et quarti, » et neuter ex aggregatis quadratis quadratus fuerit, egredietur numerus qui duobus » modis æquabitur duobus quadratis numeris; et si unus tantum ex aggregatis fuerit » quadratus, tunc æquabitur egressus numerus duobus quadratis tripliciter, et si ambo » compositi quadrati fuerint, tunc egressus æquabitur duobus quadratis quadruplici- » ter, et hæc intelligantur sine fractione. »

Ce théorème a été évidemment connu de Diophante qui, dans le cours de la solution du 22^e problème du III^e livre, s'exprime de la manière suivante : « Mais, en » outre, le nombre 65 se décompose naturellement en deux carrés de deux manières, » savoir en 16 et 49, et aussi en 64 et l'unité; et cela a lieu parce que le nombre 65 » est le produit des nombres 13 et 5, dont chacun se décompose en deux carrés. »

Bachet a énoncé et démontré le théorème en question dans la 7^e proposition de son III^e livre des *Porismes*, et Fermat l'a pris pour point de départ des plus admirables développements dans son observation ajoutée au 22^e problème du III^e livre de Diophante. (*Voir* l'édition de Toulouse ci-dessus citée, page 127.)

Enfin M. Cauchy a jugé ce théorème assez important pour le donner dans son *Cours d'Analyse*, page 181, comme un exemple de la grande utilité des expressions imaginaires, « non-seulement dans l'algèbre ordinaire, mais encore dans la théorie des » nombres. »

[***] Savoir, en trouvant trois nombres α, β, γ, tels que

$$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2,$$

il a

$$(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2,$$

donc

$$\left(\frac{a\alpha+b\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{a\beta-b\alpha}{\gamma}\right)^2=a^2+b^2.$$

et il tire parti de ses cas particuliers pour ajouter deux solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ [*]}$$

à plusieurs autres fondées sur la considération de la suite des nombres impairs.

Cossali a entrepris une restitution du *Traité des nombres carrés* [**] au moyen de l'ouvrage de Luca Paciolo, dont on savait qu'une partie des problèmes qu'il contient avaient été empruntés au Traité de Léonard de Pise. Le travail de Cossali, très-consciencieux et enrichi de discussions intéressantes, me dispense de parler ici des problèmes et des théorèmes qui ont été reproduits par Luca Paciolo.

Mentionnons, cependant, que le texte original, publié maintenant par M. le prince Boncompagni, nous présente les solutions des problèmes accompagnées de démonstrations qui ajoutent considérablement à la valeur de l'ouvrage du géomètre de Pise. Disons aussi qu'on trouve énoncées, dans le cours ou à la suite de ces démonstrations, une foule de propositions qui, aujourd'hui, nous paraissent évidentes d'elles-mêmes, mais dont la découverte pouvait avoir quelque mérite dans un temps où ces propositions et leurs démonstrations étaient nécessairement revêtues d'une forme géométrique [***].

Mais surtout il faut citer deux problèmes, non contenus dans l'analyse de Cossali, qui se trouvent dans le texte publié par M. le prince

---

[*] Prenant

$$a : b = c : d,$$

il a

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 = (bd - ac)^2 + (ad + bc)^2;$$

et prenant

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d,$$

il a

$$(a^2 + b^2)^2 = (b^2 - a^2)^2 + (2ab)^2.$$

[**] *Origine dell' Algebra*, vol. I, pages 115 à 172.

[***] Pour mieux nous expliquer, citons un exemple. Si nous écrivons les énoncés des propositions du II^e livre d'Euclide en formules algébriques, ces formules sont évidentes d'elles-mêmes; cependant leur démonstration géométrique a coûté à l'auteur des *Éléments* tout un livre, et certainement aussi quelques efforts d'esprit.

Boncompagni, et qui me semblent devoir être comptés parmi les plus intéressants du Traité entier.

Problème I. Satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$(x^2 - y^2) : (y^2 - z^2) = b : a.$$

Léonard de Pise démontre d'abord que, si le rapport donné est de la forme $\frac{\alpha + 1}{\alpha}$, ou $\frac{2\alpha + 1}{2\alpha - 1}$, ou $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, on satisfait à la question proposée en posant, dans le premier cas,

$$x = 2\alpha + 3, \quad y = 2\alpha + 1, \quad z = 2\alpha - 1;$$

dans le deuxième,

$$x = \alpha + 1, \quad y = \alpha, \quad z = \alpha - 1;$$

dans le troisième,

$$x = \beta^2, \quad y = \alpha\beta, \quad z = \alpha^2.$$

Si aucun de ces cas n'a lieu, Fibonacci cherche s'il peut obtenir

$$(a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + \ldots + (a + n) = b;$$

en ce cas, il aura

$$\{[2(a + n) + 1]^2 - (2a + 1)^2\} : [(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2] = b : a.$$

Sinon, il essaye s'il ne peut pas faire

$$(pa + 1) + (pa + 2) + \ldots + (pa + n) = pb \text{ [*]}.$$

Lorsque ce moyen ne réussit pas non plus, Fibonacci trouve deux sommes

$$(p + 1) + (p + 2) + \ldots + (p + m)$$

et

$$(p + m + 1) + (p + m + 2) + \ldots + (p + m + n),$$

telles que le rapport de la seconde à la première soit égal au rapport

[*] Cela ne peut avoir lieu que lorsque b est de la forme

μa + un quelconque des diviseurs du nombre $\frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$.

donné [*], et il aura

$$\{[2(p+m+n)+1]^2-[2(p+m)+1]^2\}$$
$$:\{[2(p+m)+1]^2-(2p+1)^2\}=b:a.$$

La solution de Fibonacci est fondée sur l'observation que les premières différences de la suite des carrés impairs sont les octuples des nombres naturels suivant l'ordre. Elle est certainement ingénieuse. Toutefois, on peut se demander qu'est-ce qui a déterminé Léonard de Pise à la préférer à une autre méthode plus simple et qui semble se présenter bien plus naturellement à l'esprit. C'est de poser

$$x=y+m, \quad z=y-n,$$

ce qui donne

$$y=\frac{am^2+bn^2}{2(bn-am)}:$$

donc, pour avoir une solution en nombres entiers,

$$\begin{aligned} x &= 2bmn-(am^2-bn^2),\\ y &= am^2+bn^2,\\ z &= 2amn+(am^2-bn^2). \end{aligned}$$

Aussi Diophante, dans le 20e problème du IIe livre, résout-il l'équation

$$x^2-y^2=3(y^2-z^2)$$

en posant

$$y=z+1, \quad x=z+3;$$

et Alkarkhî reproduit ce procédé dans le 41e problème de la IVe section de son recueil, en se contentant, comme Diophante, d'une solution fractionnaire. Or, Fibonacci paraît avoir connu l'ouvrage d'Alkarkhî, et il énonce expressément que, si x_1, y_1, z_1 satisfont à l'équation pro-

---

[*] Cela est toujours possible, parce qu'on peut toujours satisfaire à l'équation

$$\frac{(2p+m+1)m}{(2p+2m+n+1)n}=\frac{a}{b};$$

entre autres, en prenant

$$m=a+1, \quad n=b-1 \quad p=\left(\frac{b}{2}-1\right)a-1,$$

et en remplaçant, lorsque b est impair, a et b par $2a$ et $2b$.

posée, mx_1, my_1, mz_1 satisferont également, de sorte qu'il possède le moyen de se procurer une solution entière, dès qu'il a une solution fractionnaire. Il y a donc lieu de croire que Fibonacci a évité à dessein ce procédé, et qu'il s'est efforcé de donner dans son ouvrage, adressé à Frédéric II, des méthodes réellement originales, parce que très-probablement les savants attachés à la cour de l'empereur n'ignoraient pas non plus complétement les travaux et les découvertes des géomètres arabes.

Problème II. Satisfaire simultanément aux équations

$$x + y + z + x^2 = u^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 = v^2,$$
$$x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \text{ [*]}.$$

Fibonacci résout d'abord

$$u_1^2 + y_1^2 = v_1^2, \quad v_1^2 + z_1^2 = w_1^2;$$

cela fait, il aura aussi

$$(\lambda u_1)^2 + (\lambda y_1)^2 = (\lambda v_1)^2, \quad (\lambda u_1)^2 + (\lambda y_1)^2 + (\lambda z_1)^2 = (\lambda w_1)^2;$$

il n'a donc plus qu'à résoudre

(1) $$(\lambda u_1)^2 - (\lambda y_1 + \lambda z_1) = x(x+1).$$

Pour cela, il se sert de l'identité

(2) $$(\lambda u_1)^2 - [(2n+1)\lambda u_1 - n(n+1)] = (\lambda u_1 - \overline{n+1})(\lambda u_1 - n),$$

et obtient, par la combinaison de (1) et (2),

$$\lambda = \frac{n(n+1)}{(2n+1)u_1 - (y_1 + z_1)}, \quad x = \lambda u_1 - (n+1).$$

On ne trouve de cette manière, en général, que des solutions fractionnaires. Mais, après avoir exposé ce mode de solution, Fibonacci vérifie aussi les équations proposées par la substitution des valeurs entières

$$x = 35, \quad y = 144, \quad z = 360,$$

---

[*] « Questio mihi proposita a Magistro Theodoro, domini Imperatoris phylosopho. »

sans expliquer cependant s'il a trouvé ces valeurs autrement que par un simple tâtonnement [*]. Enfin, il étend le problème à un plus grand nombre d'équations de même nature, renfermant un plus grand nombre d'inconnues; mais c'est là que le texte se trouve brusquement interrompu, attendu que la fin du Traité manque dans le manuscrit découvert par M. le prince Boncompagni.

---

[*] Désignant par $\delta_{\overline{n.n+1}}$ un quelconque des diviseurs du nombre $n(n+1)$, il s'agit de satisfaire simultanément, par des nombres entiers, aux équations

$$v_1^2 - y_1^2 = u_1^2 \quad \text{et} \quad w_1^2 - v_1^2 = \left(\overline{2n+1}\cdot u_1 - \delta_{\overline{n.n+1}} - y_1\right)^2;$$

prenons

$$v_1 = \frac{u_1^2+1}{2}, \quad y_1 = \frac{u_1^2-1}{2}, \quad n = u_1 - 1, \quad \delta = u_1,$$

il suit

$$5u_1^4 - 12u_1^3 + 12u_1^2 - 4u_1 + 1 = 2w_1^2,$$

équation à laquelle on devra satisfaire par une valeur entière et impaire de u_1. C'est ce que l'on peut, en effet, en posant

$$u_1 = 7, \quad \text{d'où} \quad w_1 = 65.$$

Puis, on aura

$$n = 6, \quad y_1 = 24, \quad z_1 = 60, \quad \lambda = 6,$$

d'où résultent les valeurs entières trouvées par Fibonacci.

MÉMOIRE

Sur une forme nouvelle du second théorème principal de la Théorie mécanique de la Chaleur;

PAR M. R. CLAUSIUS [*].

(Traduit des *Annales de Poggendorff*, vol. XCIII, par M. G. MICHAELIS.)

Dans mon Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur et sur les lois qui en résultent pour la théorie de la chaleur, j'ai démontré que le théorème de l'équivalence de la chaleur et du travail mécanique et le théorème de S. Carnot ne s'excluent pas l'un l'autre, mais qu'on peut les mettre d'accord par une légère modification de ce dernier théorème, laquelle n'en change pas la signification principale. Sauf cette modification indispensable, j'ai laissé au théorème de Carnot sa forme primitive, parce qu'alors il m'importait surtout de tirer de l'application des deux théorèmes à des cas spéciaux des conclusions qui, en se rapportant à des qualités connues ou encore inconnues des corps, fussent propres à servir ou de preuves de la certitude des théorèmes ou d'exemples de leur fécondité.

Mais cette forme, quoiqu'elle suffise à l'établissement des équations dont on a besoin, est néanmoins imparfaite parce qu'elle ne fait

[*] Voici un extrait de la lettre que M. Clausius m'a adressée en m'envoyant cette traduction : « Vous avez inséré dans le tome XVII de votre Journal la traduction de
» deux Mémoires de M. William Thomson, qui concernent des théorèmes que j'ai
» donnés dans un Mémoire de 1850. Je viens de publier un nouveau Mémoire que j'ai
» l'honneur de vous envoyer. Vous y retrouverez les mêmes théorèmes sous une autre
» forme qui les rend, je crois, plus propres aux applications et plus faciles à comprendre, sans en changer le contenu essentiel. M. Michaëlis, que vous connaissez, a
» eu la bonté d'en faire une traduction française, et vous me feriez grand plaisir en
» insérant cette traduction dans votre Journal, etc. » (J. L.)

pas voir assez clairement l'essence du théorème et sa liaison avec le premier théorème principal. C'est pourquoi je pense qu'il ne sera pas sans intérêt de présenter dans ce qui suit une autre forme qui me paraît mieux répondre à cette exigence et qui en même temps sera fort convenable pour les applications.

Avant de m'engager dans la discussion du second théorème, qu'il me soit permis de dire sur le premier théorème ce qui sera nécessaire au point de vue de l'ensemble du sujet. Je pourrais, à la vérité, regarder cela comme étant suffisamment connu par mon propre Mémoire et par les Mémoires d'autres auteurs, mais il serait pénible d'y faire des recherches, et, en outre, je crois que l'exposé suivant sera préférable à mon premier exposé, comme plus général et en même temps plus court.

Théorème de l'équivalence de la chaleur et du travail mécanique.

Quand de la chaleur produit une force mouvante opposée à une autre force, il arrive que dans tout mouvement, dans un sens ou dans l'autre, l'une des forces fait un travail positif et que l'autre fait un travail négatif. Ce travail ne figurant dans le calcul que comme une quantité simple, on peut en déterminer le signe à son gré ou d'après l'une ou d'après l'autre des deux forces. Dans les recherches qui concernent spécialement la puissance motrice de la chaleur, on a coutume de déterminer le signe du travail en comptant comme positive une quantité de travail produite par de la chaleur, et comme négative la quantité de travail opposé d'une autre force. Cela étant admis, on peut énoncer le théorème de l'équivalence de la chaleur et du travail, qui n'est qu'un cas spécial de la relation générale entre la force vive et le travail mécanique, de la manière suivante :

Le travail peut se transformer en chaleur, et réciproquement la chaleur en travail, de manière que la quantité de l'un soit toujours proportionnelle à celle de l'autre.

Les forces qui doivent y être prises en considération sont de deux espèces : celles que les atomes d'un corps exercent les uns sur les autres et qui, par conséquent, ont leur existence dans la nature même du corps, et celles qui viennent d'influences étrangères, auxquelles le corps est soumis. D'après ces deux espèces de forces à vaincre, j'ai distingué le travail produit par la chaleur en travail *intérieur* et travail *extérieur* qui sont soumis à des lois essentiellement différentes.

En ce qui concerne le travail *intérieur*, on voit aisément que si un corps en partant d'un certain état initial et en parcourant une série de modifications revient à son état initial, les quantités de travail intérieur qui y sont produites doivent s'entre-détruire les unes les autres. Car en supposant qu'il restât un certain travail intérieur, ou positif, ou négatif, il faudrait que par celui-ci fût effectué soit un travail extérieur opposé, soit une variation de la quantité de chaleur existante, et comme on pourrait répéter la même opération autant de fois qu'on voudrait, on *gagnerait* dans un cas perpétuellement ou du travail ou de la chaleur avec rien, et on *perdrait* dans l'autre cas perpétuellement ou du travail ou de la chaleur, sans en obtenir un équivalent, ce qui sans doute sera généralement reconnu comme impossible l'un et l'autre. Donc, quand à chaque retour d'un corps à son état initial, le travail intérieur sera nul, il s'ensuivra que par suite d'une modification quelconque dans l'état d'un corps, le travail intérieur sera parfaitement déterminé par l'état initial et par l'état final, sans qu'on ait besoin de connaître le chemin qui aura été suivi d'un état à l'autre. Car si l'on conçoit qu'un corps soit amené successivement par des chemins différents d'un état à un autre, et qu'il soit toujours ramené par le même chemin à son état initial, il faudra que toutes les quantités de travail intérieur produites le long des chemins différents soient détruites par la commune quantité de travail produite dans le retour, et que par cette raison elles soient égales.

Quant au travail *extérieur*, il en est autrement. L'état initial et l'état final étant les mêmes, il peut être aussi différent que les influences extérieures auxquelles le corps peut être soumis durant ses modifications.

Si nous considérons maintenant à la fois le travail intérieur et le travail extérieur produits dans une modification d'un corps, il se pourra que tous les deux, au cas qu'ils soient de signes contraires, se détruisent en partie l'un l'autre, et alors il faudra que la variation simultanée de la quantité de chaleur soit équivalente au reste. Mais dans le calcul, ce sera la même chose que si l'on admettait pour chaque espèce de travail en particulier une variation équivalente de chaleur.

Soit donc Q la quantité totale de chaleur que l'on devra communiquer à un corps pour qu'il passe par un chemin donné d'un état à un autre (une quantité de chaleur cédée devant être comptée négativement), nous la décomposerons en trois parties, dont la première sera l'augmentation de la chaleur qui se trouve effectivement dans le corps, dont la deuxième sera la chaleur consommée par le travail intérieur, et dont la troisième sera la chaleur consommée par le travail extérieur. A la première partie sera applicable ce qui a déjà été dit de la deuxième, c'est-à-dire qu'elle sera indépendante de la manière dont la modification du corps aura lieu; nous pourrons donc représenter les deux parties par une fonction U, de laquelle nous savons du moins, sans la connaître autrement, qu'elle sera parfaitement déterminée par l'état initial et par l'état final du corps. La troisième partie, au contraire, l'équivalent du travail extérieur ne pourra, comme celui-ci même, être déterminée, que quand le chemin entier des modifications sera connu. Désignons par W le travail extérieur, et par A l'équivalent de chaleur pour l'unité de travail, la valeur de la troisième partie sera A.W, et nous aurons pour exprimer le premier théorème principal l'équation suivante :

$$(\mathrm{I}) \qquad Q = U + A.W.$$

Pour une série de modifications qui seront telles qu'un corps finira par revenir à son état initial, et que nous désignerons brièvement par la suite sous le nom de *mode d'opérations d'un tour entier,* on aura

$$U = 0,$$

et, par suite, l'équation précédente deviendra

$$(1) \qquad Q = A.W.$$

Pour donner à l'équation (I) des formes plus spéciales, sous lesquelles elle exprimera des qualités déterminées des corps, nous devrons faire des suppositions spéciales sur les influences extérieures auxquelles se trouvera soumis un corps. Supposons que la seule force étrangère qui soit active ou qui du moins ait une influence essentielle dans la détermination du travail, soit une pression extérieure normale et d'une égale intensité en tous les points de la surface, ce qui sera toujours le cas pour les corps fluides et pour les gaz, quand il n'y aura pas d'autres forces extérieures coopérantes, et, ce qui sera du moins possible, pour les corps solides. Sous cette condition il ne sera pas nécessaire, dans la détermination du travail extérieur, de considérer les modifications de la forme du corps et ses dilatations ou ses contractions selon diverses directions, mais il suffira de considérer la variation totale du volume. De plus, nous supposerons que la pression ne varie que successivement, de façon qu'à chaque instant elle diffère si peu de la force expansive opposée du corps, que l'une et l'autre pourront être supposées égales dans le calcul. Alors la pression sera une qualité du corps même qui pourra être déterminée par ses autres qualités simultanées.

Dans les suppositions indiquées, nous pourrons regarder la pression et, en général, l'état du corps, autant qu'il devra être pris en considération ici, comme étant déterminé quand sa température t et son volume v seront donnés. Nous regarderons donc ces deux quantités comme les variables indépendantes, et nous concevrons la pression p, de même que la quantité U de l'équation (1) comme des fonctions de ces variables. Quand ensuite t et v croîtront de dt et dv, le travail extérieur produit pourra être facilement déterminé. Quand la température croîtra sans variation de volume, il n'en résultera aucun travail extérieur; mais quand le volume croîtra de dv, le travail produit sera pdv, pourvu que nous négligions toutes les quantités différentielles d'ordres supérieurs. Le travail produit pendant l'accroissement simultané de t et de v sera donc

$$dW = pdv,$$

et, en appliquant cela à l'équation (1), on obtiendra

$$dQ = dU + A.pdv. \tag{2}$$

A cause du terme $A.pdv$, cette équation ne pourra être intégrée qu'alors qu'on aura une relation entre t et v au moyen de laquelle t pourra être exprimé en fonction de v, et, par conséquent aussi, p en fonction de v seule. Ce sera alors cette fonction qui indiquera, conformément à ce qui a été dit plus haut, le chemin des modifications.

De cette équation on pourra encore éliminer la fonction inconnue U. En l'écrivant sous la forme suivante :

$$\frac{dQ}{dt}dt + \frac{dQ}{dv}dv = \frac{dU}{dt}dt + \left(\frac{dU}{dv} + A.p\right)dv,$$

on verra aisément qu'elle se décompose dans les deux équations suivantes :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{dU}{dv} + A.p.$$

De ces deux équations la première devra être différentiée par rapport à v et la dernière par rapport à t. A la fonction U nous pourrons appliquer le théorème connu, que si une fonction de deux variables indépendantes est différentiée successivement par rapport aux deux variables, l'ordre des différentiations est arbitraire. Quant à la quantité Q, ce théorème ne s'appliquera pas, et par cette raison nous devrons choisir pour elle une telle notation qu'on puisse reconnaître l'ordre des différentiations, ce qui est fait dans les équations suivantes :

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = \frac{d^2U}{dt\,dv},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dv}\right) = \frac{d^2U}{dt\,dv} + A\cdot\frac{dp}{dt}.$$

Par la soustraction de ces deux équations, on aura l'équation demandée qui ne contiendra plus la fonction U,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dt}\right) = A\cdot\frac{dp}{dt}. \tag{3}$$

On pourrait spécialiser encore davantage les équations (2) et (3) en les appliquant à des classes déterminées de corps. Pour les deux cas les plus importants, c'est-à-dire pour les gaz permanents et pour les vapeurs au maximum de densité, j'ai fait cette application dans mon premier Mémoire, c'est pourquoi je ne m'en occuperai pas ici, mais je passerai au second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur.

Théorème de l'équivalence des transformations.

Le théorème de Carnot, après avoir été mis d'accord avec le premier théorème principal, exprime une relation entre deux espèces de transformations, savoir une transformation de chaleur en travail et une translation de chaleur d'un corps plus chaud dans un corps moins chaud, ce que nous pouvons regarder comme une transformation de chaleur d'une température plus élevée en chaleur d'une température plus basse. Dans la forme qu'il a eue jusqu'à présent il peut être exprimé de la manière suivante :

Dans tous les cas où une quantité de chaleur est transformée en travail et où le corps, moyennant cette transformation, finit par revenir à son état initial, il faut qu'en même temps une autre quantité de chaleur passe d'un corps plus chaud dans un corps plus froid, et que la quantité de la dernière chaleur, comparée à la première, ne dépende que des températures des deux corps entre lesquels elle est transmise, et non de l'espèce du corps servant de véhicule.

Mais l'établissement de ce théorème est fondé sur un mode d'opération trop simple, où il ne s'agit que de deux corps qui perdent ou gagnent de la chaleur, et il y est supposé tacitement que la chaleur transformée en travail provient d'un des deux corps, entre lesquels la transmission de chaleur a lieu. De cette manière, une supposition étant faite d'avance sur la température de la chaleur transformée en travail, l'influence qu'une variation de cette température exerce sur la relation des deux quantités de chaleur est masquée, et le théorème dans la forme susdite est incomplet.

La détermination de cette influence pourrait aisément être atteinte si l'on combinait le théorème dans sa forme restreinte avec le premier théorème principal, et l'on pourrait, par conséquent, compléter le théorème en y ajoutant le résultat ainsi obtenu. Cependant par ce détour le tout perdrait en clarté et en facilité d'aperçu, et je crois qu'il sera plus utile de déduire la forme plus générale du théorème directement du même principe que celui que j'ai déjà employé dans mon premier Mémoire pour démontrer le théorème modifié de Carnot.

Le principe, sur lequel reposent en entier les développements ci-après, est :

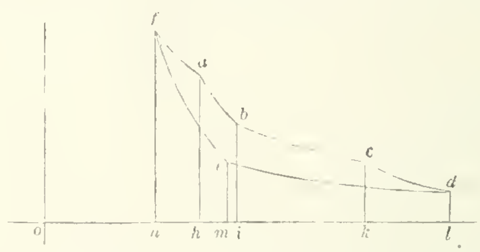
Il ne peut jamais passer de la chaleur d'un corps plus froid dans un corps plus chaud sans qu'il n'y corresponde quelque autre modification.

Ce principe est constaté, par tout ce que nous savons de l'échange de chaleur entre des corps de températures différentes, la chaleur montrant partout une tendance à annuler les différences de température, et, par suite, à passer des corps plus chauds aux corps plus froids. C'est pourquoi l'on en admettra sans doute l'exactitude sans autres développements.

Pour commencer, nous nous servirons de nouveau du mode d'opérations inventé par Carnot et représenté graphiquement par Clapeyron, mais avec cette différence que nous supposerons outre les deux corps entre lesquels la transmission de chaleur aura lieu, encore un troisième corps à une température quelconque qui fournira la chaleur transformée en travail.

Comme il ne s'agira que d'un exemple, nous choisirons comme corps variable un de ceux dont les modifications se feront d'après les lois les plus simples possible, c'est-à-dire un gaz permanent.

Soient donc t la température et v le volume d'une quantité donnée d'un gaz permanent, et représentons par l'abscisse oh dans la figure suivante le volume et par l'ordonnée ha la pression exercée par le gaz



à la température t et sous le volume v, et concevons qu'on effectue avec le gaz les opérations suivantes :

1°. On amène le gaz de la température t à une autre température t_1 qui, par exemple, soit plus basse que t de manière que le gaz se dilate dans une enveloppe non perméable à la chaleur. La diminution de la pression produite par l'accroissement du volume et le décroissement simultané de la température seront représentés par l'arc ab, de manière que, quand la température du gaz sera abaissée jusqu'à t_1, son volume et sa pression seront devenus oi et ib.

2°. On met le gaz en communication avec un corps K_1 à la température t_1 et on continue à le laisser se dilater, mais de manière que toute la chaleur absorbée par la dilatation lui soit rendue par le corps. Nous supposerons que la température du dernier corps, à cause de sa grandeur ou pour quelque autre raison, ne soit pas sensiblement abaissée par cette cession de chaleur et qu'elle puisse, par conséquent, être regardée comme constante. Alors le gaz conservera aussi pendant la dilatation cette température constante, et la diminution de la pression sera représentée par un arc d'hyperbole équilatère *bc*. Soit Q_1 la quantité de chaleur cédée par K_1.

3°. On sépare le gaz du corps K_1 et on continue de le laisser se dilater sans qu'il puisse ni perdre ni gagner de la chaleur, jusqu'à ce que sa température soit abaissée de t_1 à t_2. La diminution de pression qui aura lieu pourra être représentée par l'arc *cd*, qui sera de la même nature que *ab*.

4°. On met le gaz en communication avec un corps K_2 maintenu à la température constante t_2, et on le comprime en laissant toute la chaleur produite se communiquer au corps K_2. On continue cette compression jusqu'à ce que K_2 ait reçu la même quantité de chaleur Q_1 que celle qui a été cédée auparavant par K_1. La pression augmente d'après l'hyperbole équilatère *de*.

5°. On retire le gaz du corps K_2 et on le comprime sans qu'il puisse ni perdre ni gagner de la chaleur, jusqu'à ce que sa température soit montée de t_2 à la valeur initiale t, la pression augmentant le long de l'arc *ef*. Le volume *on*, auquel le gaz est amené de cette manière, est moindre que son volume initial *oh*, car comme pendant la compression *de*, la pression à vaincre, et, par conséquent aussi, le travail extérieur, étaient moindres que les quantités correspondantes pendant la dilatation *bc*, il faudra, pour que la même quantité de chaleur Q_1 se produise, que la compression soit continuée plus longtemps qu'il n'aurait été nécessaire si les compressions avaient dû seulement détruire les dilatations.

6°. On met le gaz en communication avec un corps K maintenu à la température constante t, et on le laisse se dilater jusqu'à son volume initial *oh*, K lui rendant la chaleur absorbée. Soit Q la quantité de chaleur nécessaire pour cela. Quand le gaz à la température t atteindra le volume *oh*, il reviendra à sa pression initiale, et l'hyperbole équilatère, qui représentera la diminution de pression, atteindra le point *a*.

Ces six changements forment un *mode d'opérations d'un tour entier*, le gaz finissant par revenir exactement à son état initial. Des trois corps K, K_1, K_2, qui pendant l'opération ne sont à considérer qu'autant qu'ils servent de sources ou de réservoirs de chaleur, les deux premiers ont perdu les quantités de chaleur Q et Q_1, et le dernier a gagné la quantité de chaleur Q_1, ce qu'on peut exprimer en disant que Q_1 a passé de K_1 à K_2 et que Q a disparu. La dernière quantité de chaleur, d'après ce qui a été dit du premier théorème principal, doit être transformée en travail extérieur. Ce qui a été gagné de travail extérieur dans une opération d'un tour entier, par suite de ce que la pression du gaz pendant la dilatation était plus grande que pendant la compression, et de ce que, par conséquent, le travail positif était plus grand que le travail négatif, est représenté, comme on le voit aisément, par l'aire de la figure fermée *abcdef*. Si l'on désigne ce travail par W, il faudra que, d'après l'équation (1), on ait

$$Q = A.W.$$

Le tour entier des opérations décrites ci-dessus peut être renversé en effectuant d'abord une compression *af* pendant la communication du gaz avec le corps K, au lieu de la dilatation précédente *fa*, et en effectuant de même l'une après l'autre les dilatations *fe* et *ed*, et les compressions *dc*, *cb* et *ba*, toujours aux mêmes conditions, auxquelles on a effectué auparavant les modifications opposées. Alors les corps K et K_1 *gagneront* les quantités de chaleur Q et Q_1, et K_2 *perdra* la quantité de chaleur Q_1. En même temps, le travail négatif sera plus grand que le travail positif, de manière que l'aire de la figure fermée représentera maintenant une *perte* de travail. Le résultat des opérations renversées est donc que la quantité de chaleur Q_1 a passé de K_2 à K_1, et que la quantité de chaleur Q est produite par du travail et cédée au corps K.

Pour parvenir à connaître la dépendance mutuelle des deux transformations simultanées, nous supposerons d'abord que les températures des trois réservoirs de chaleur restent les mêmes, mais que les modes d'opérations d'un tour entier par lesquels les transformations sont produites soient différents, en ce que d'autres corps au lieu du gaz pourront être soumis à des modifications semblables ou que d'autres modes d'opérations d'un tour entier pourront être effectués à la condition que les trois corps K, K_1, K_2 soient les seuls qui gagnent ou perdent de la chaleur, et qu'en outre l'un des deux derniers en gagne autant que l'autre en perd. Ces divers modes d'opérations seront susceptibles d'être effectués en sens direct et en sens inverse, comme celui que nous venons de considérer, ou ils ne le seront pas, et la loi qui régira ces transformations changera de l'un à l'autre cas. Il nous sera facile par la suite de trouver la modification à laquelle la loi sera soumise pour des modes d'opérations non susceptibles d'être effectués dans les deux sens. Nous nous bornerons donc à ne considérer d'abord que des modes d'opérations susceptibles d'être renversés.

Cela posé, nous pouvons prouver que la quantité de chaleur Q_1 transmise de K_1 à K_2 sera toujours dans un même rapport avec la quantité Q transformée en travail. Car s'il y avait deux modes d'opérations dans lesquels, la quantité Q étant supposé égale de l'un à l'autre, la quantité Q_1 serait différente, on pourrait exécuter directement l'un des modes dans lequel Q_1 serait moindre, et inversement l'autre. Alors la quantité de chaleur Q, transformée par le premier mode en travail, serait transformée par le second mode en chaleur et rendue au corps K, et pour le reste aussi tout se retrouverait à la fin dans l'état initial, à l'exception qu'il y aurait plus de chaleur transmise de K_2 à K_1 que dans la direction opposée. Il y aurait donc eu en tout une transmission de chaleur du corps plus froid K_2 au corps plus chaud K_1, qui ne serait compensée par rien, ce qui est contraire au principe.

Des deux transformations survenues dans un pareil double mode d'opérations, chacune pourra remplacer l'autre, celle-ci étant prise en sens opposé, de telle sorte que, quand une transformation d'une espece aura eu lieu, celle-ci pourra être refaite en sens contraire, de maniere à donner lieu à une transformation de l'autre espèce sans qu'une autre modification durable y soit nécessaire. Quand, par exemple, la quantité de chaleur Q aura été produite de quelque manière par du travail et aura été reçue par le corps K, on pourra la reprendre du corps K, par ledit mode d'opérations d'un tour entier, et la transformer de nouveau en travail, mais en même temps la quantité de chaleur Q_1 passera du corps K_1 à K_2; ou bien, quand la quantité de chaleur Q_1 aura passé d'abord de K_1 à K_2, on pourra la ramener à K_1 en produisant en même temps avec du travail la quantité de chaleur Q à la température du corps K.

On voit donc que ces deux espèces de transformations pourront être regardées comme des opérations de même nature, et nous nommerons *équivalentes* deux transformations qui pourront se remplacer l'une l'autre de la manière indiquée. Il s'agit à présent de trouver la loi suivant laquelle on devra représenter les transformations comme des quantités mathématiques, de manière que l'équivalence de deux transformations dérive de l'égalité de leurs valeurs. La valeur mathématique d'une transformation déterminée de cette manière sera appelée sa *valeur d'équivalence*.

En ce qui concernera d'abord le sens dans lequel chaque espèce de transformation devra être prise positivement, il pourra être choisi à volonté pour l'une, et alors il sera déterminé en même temps pour l'autre, par la raison qu'on devra prendre comme positive une transformation qui sera équivalente à une transformation positive de l'autre espèce. Nous prendrons positivement dans ce qui va suivre *une transformation de travail en chaleur, et, par conséquent aussi, une transmission de chaleur d'une température plus haute à une température plus basse*.

Quant aux valeurs d'équivalence, il est d'abord clair que la valeur d'une transformation de travail en chaleur devra être proportionnelle à la quantité de chaleur produite, et qu'elle ne pourra dépendre en outre que de sa température. On pourra donc représenter, en général, la valeur d'équivalence de la quantité de chaleur Q à la température t produite par du travail par l'expression

$$Q\,.\,f(t),$$

dans laquelle $f(t)$ sera une même fonction de la température pour tous les cas. Quand Q deviendra négatif dans cette formule, cela exprimera que la quantité de chaleur Q n'est pas produite par une transformation de travail en chaleur, mais par une transformation de chaleur en travail. De même, la valeur de la transmission de la quantité de chaleur Q de la température t_1 à la température t_2 devra être proportionnelle à la quantité de chaleur transmise, et elle ne pourra, dépendre, en outre, que des deux températures. Elle pourra donc être exprimée, en général, par la formule

$$Q . F(t_1, t_2),$$

dans laquelle $F(t_1, t_2)$ sera pour tous les cas une même fonction des deux températures, qu'à la vérité nous ne connaissons pas encore, mais dont nous savons du moins qu'elle devra, par l'échange des deux températures, changer de signe, sa valeur numérique restant la même, de telle sorte qu'on pourra poser

(4) $$F(t_2, t_1) = - F(t_1, t_2).$$

Pour trouver la relation de ces deux expressions, nous avons la condition que, dans chaque mode d'opération susceptible d'être effectué en deux sens opposés, les deux transformations qui y surviennent devront être de la même valeur, mais de signes opposés, c'est-à-dire que leur somme algébrique devra être $= 0$. Dans le mode d'opérations, par exemple, qui été complétement décrit plus haut pour un gaz, la quantité de chaleur Q à la température t a été transformée en travail, ce qui donnera la valeur d'équivalence $- Q . f(t)$, et la quantité de chaleur Q_1 a été amenée de la température t_1 à t_2, ce qui donnera la valeur d'équivalence $Q_1 . F(t_1, t_2)$. On aura, par conséquent, l'équation

(5) $$- Q . f(t) + Q_1 F(t_1, t_2) = 0.$$

Supposons à présent que le même mode d'opérations soit effectué en sens inverse, de façon que les corps K_1 et K_2 et la quantité de chaleur Q_1 transmise de l'un à l'autre restent les mêmes qu'auparavant, mais que le corps K à la température t soit remplacé par un autre corps K' à la température t', et appelons Q' la quantité de chaleur produite dans ce cas-là par du travail ; nous aurons, conformément à l'équation précédente,

(6) $$Q' . f(t') + Q_1 . F(t_2, t_1) = 0.$$

En ajoutant ces deux équations et en tenant compte de l'équation (4), on obtiendra

(7) $$- Q . f(t) + Q' . f(t') = 0.$$

Si l'on regarde à présent les deux modes d'opérations exécutés l'un après l'autre comme un seul mode, ce qui est permis naturellement, il ne s'agira plus dans celui-ci des quantités de chaleur transmises de K_1 à K_2 et de K_2 à K_1, parce qu'elles se seront détruites mutuellement, et il ne nous restera, par suite, que la transformation de la quantité de chaleur Q cédée par K en travail et la production par du travail de la quantité de chaleur Q′ reçue par le corps K′. Mais ces deux transformations de *même espèce* pourront aussi être décomposées et composées, de façon qu'elles reparaîtront comme deux transformations d'*espèces différentes*. En se tenant simplement au fait que l'un des corps K a perdu la quantité de chaleur Q, et que l'autre corps K′ a gagné la quantité de chaleur Q′, on pourra regarder la portion commune aux deux quantités comme transportée directement de K à K′, et l'on n'aura à tenir compte d'une transformation de travail en chaleur ou de chaleur en travail que d'après la différence des deux quantités.

Soit, par exemple, la température t' plus haute que t, la transmission de chaleur aura la direction du corps plus froid au corps plus chaud, et elle sera, par suite, négative. Par conséquent, l'autre transformation devra être positive, c'est-à-dire une transformation de travail en chaleur, d'où il suit que la quantité de chaleur Q′ gagnée par K′ sera plus grande que la quantité de chaleur Q cédée par K. Lors donc que nous décomposerons Q′ en deux parties

$$Q \quad \text{et} \quad Q' - Q,$$

la première sera la quantité de chaleur transmise de K à K′, et la dernière sera celle produite par du travail.

Dans cette manière de voir, le double mode d'opérations paraîtra comme de la même espèce que les deux modes simples dont il est composé, car la circonstance que la chaleur produite n'est pas reçue par un troisième corps, mais par un des deux entre lesquels la transmission de chaleur a lieu, ne fera pas une différence essentielle, la température de la chaleur produite étant arbitraire et pouvant avoir la même valeur que la température de l'un des deux corps, auquel cas le troisième corps sera superflu. Il faudra, par conséquent, que les deux quantités de chaleur Q et Q′ — Q soient assujetties à une équation de même forme que l'équation (6), c'est-à-dire

$$(Q' - Q) . f(t') + Q . F(t, t') = 0.$$

En éliminant de cette équation et de l'équation (7) la quantité Q' et en supprimant le commun facteur Q, on obtient l'équation

$$(8) \qquad F(t, t') = f(t') - f(t),$$

au moyen de laquelle, les températures t et t' étant arbitraires, la fonction de deux températures applicable à la seconde espèce de transformations est généralement réduite à la fonction d'une seule température applicable à des transformations de la première espèce.

Pour abréger, nous adopterons pour la dernière fonction une notation plus simple. Par des raisons qui apparaîtront plus tard, il sera convenable de ne pas désigner la fonction même, mais sa valeur réciproque. Nous poserons donc

$$(9) \qquad f(t) = \frac{1}{T},$$

de façon que T soit la fonction inconnue de la température qui se trouvera dans les valeurs d'équivalence. Quand nous aurons à représenter des valeurs particulières de cette fonction correspondantes aux températures t_1, t_2, etc., nous le ferons simplement en écrivant T_1, T_2, etc.

D'après cela, le second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur, que l'on pourra nommer, je crois, dans sa forme actuelle, le *théorème de l'équivalence des transformations*, s'exprimera de la manière suivante :

Si l'on nomme équivalentes deux transformations qui pourront se remplacer l'une l'autre sans exiger aucune autre modification durable, la production d'une quantité de chaleur Q à la température t par du travail aura une valeur d'équivalence représentée par

$$\frac{Q}{T},$$

et le passage de la quantité de chaleur Q de la température t_1 à la température t_2 aura une valeur d'équivalence représentée par l'expression

$$Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

dans laquelle T *sera une fonction de la température indépendante du mode d'opération par lequel la transformation sera produite.*

En écrivant la dernière expression sous la forme

$$\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1},$$

on voit que le passage de la quantité de chaleur Q de la température t_1 à la température t_2 a la même valeur d'équivalence qu'une double transformation de la première espèce, c'est-à-dire la transformation de la quantité de chaleur Q à la température t_1 en travail et la transformation de la quantité de travail en chaleur à la température t_2. Une dissertation sur la question de savoir jusqu'à quel point cette conformité extérieure pourra être fondée d'après la nature même des opérations, ne me paraîtrait pas être à sa place ici; mais, en tout cas, dans la détermination analytique de la valeur d'équivalence, on pourra regarder toute transmission de chaleur, de quelque manière qu'elle soit produite, comme une pareille combinaison de deux transformations contraires de la première espèce.

Au moyen de cette règle, il deviendra facile, pour tout mode d'opérations d'un tour entier, quelque compliqué qu'il soit et de quelque nombre de transformations des deux espèces qu'il se compose, de former l'expression analytique représentant la valeur totale de toutes ces transformations. D'après cela, quand une quantité de chaleur aura été reçue par un réservoir, on n'aura pas besoin de rechercher quelle partie de cette quantité de chaleur aura été produite par du travail et d'où sera venu le reste; mais on pourra, pour tous les réservoirs employés dans le cercle entier des opérations, faire figurer dans le calcul toute quantité de chaleur reçue comme produite par du travail, et toute quantité de chaleur perdue comme transformée en travail. En supposant donc que les divers corps servant de réservoirs de chaleur K_1, K_2, K_3, etc., aux températures t_1, t_2, t_3, etc., aient reçu pendant le cours entier des opérations les quantités de chaleur Q_1, Q_2, Q_3, etc., à la condition de compter comme négatives les quantités de chaleur qui auront été cédées, la valeur totale de toutes les transformations, que nous désignerons par N, sera représentée par la somme algébrique suivante :

$$N = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \ldots,$$

ou, en indiquant la somme par un signe de sommation,

$$(10) \qquad N = \sum \frac{Q}{T}.$$

Il est supposé dans cette formule que les températures des corps K_1, K_2, K_3, etc., soient constantes, ou du moins si près d'être constantes, que leurs variations soient négligeables. Mais si la température d'un des corps, ou par la réception de la quantité de chaleur Q même, ou par une autre raison quelconque, variait assez considérablement pendant le cours des opérations pour que cette variation dût être prise en considération, il faudrait que, pour chaque élément de chaleur reçu dQ, on employât la température que le corps aurait au moment de sa réception. En supposant, pour plus de généralité, que cette circonstance ait lieu dans tous les corps, l'équation précédente prendra la forme suivante :

$$(11) \qquad N = \int \frac{dQ}{T},$$

l'intégrale devant s'étendre à toutes les quantités de chaleur reçues par les différents corps.

Quand le cercle entier des opérations sera susceptible d'être effectué en sens contraire, quelque compliqué qu'il puisse être, on prouvera, de la même manière que pour les modes d'opérations simples considérés plus haut, *que les transformations qui s'y présenteront se compenseront exactement et que leur somme algébrique sera* $= 0$.

Car s'il en était autrement, on pourrait concevoir toutes les transformations qui auraient eu lieu comme divisées en deux parties, dont la première donnerait une somme algébrique égale à zéro, et dont la seconde ne contiendrait que des transformations de même signe. Les transformations de la première partie s'anéantiraient par un nombre fini ou infini de modes d'opérations simples, et il ne resterait que les transformations de la seconde partie sans aucune autre modification. Si ces transformations étaient *négatives*, c'est-à-dire des transformations de chaleur en travail et des transmissions de chaleur d'une température plus basse à une température plus haute, on pourrait encore remplacer les premières par des transformations de la dernière espèce, et il ne resterait à la fin que des transmissions de chaleur d'une température plus basse à une température plus haute qui ne seraient compensées par rien, ce qui est contraire au principe mentionné plus haut. Pareillement, si ces transformations-là étaient *positives*, on n'aurait qu'à effectuer les mêmes opérations en sens inverse pour les rendre négatives, et l'on rencontrerait la même impossibilité. Il s'ensuit que la seconde partie des transformations ne pourra généralement pas exister.

Par conséquent, pour tous les modes d'opérations susceptibles d'être effectués dans les deux sens, le second théorème principal de la théorie mécanique de la chaleur pourra être exprimé analytiquement par l'équation

$$\text{(II)} \qquad \int \frac{dQ}{T} = 0.$$

On pourra encore étendre considérablement le champ des applications de cette équation, en donnant à la quantité t qui y est contenue une signification un peu différente. Si nous supposons, pour cela, un tel mode d'opérations qu'un corps donné parcoure une série de changements d'état et qu'à la fin il revienne à son état initial, en admettant que, pour plus de simplicité, le corps ait constamment dans toutes ses parties la même température, il faudra, pour que le mode d'opérations contraire soit possible, que le corps donné ne soit mis en contact pour recevoir ou perdre de la chaleur qu'avec des réservoirs de chaleur qui soient à la même température que lui-même, car c'est le seul cas où la chaleur puisse faire aussi le chemin inverse. On ne pourra, à la vérité, pas satisfaire absolument à cette condition, quand une transmission de chaleur devra avoir lieu, mais on pourra du moins la regarder comme étant remplie assez approximativement pour que les petites différences de températures qu'il y aura encore soient négligeables dans le calcul. Dans ce cas-là, il sera naturellement indifférent que la quantité t contenue dans l'équation (II) représente la température du réservoir de chaleur qu'on aura employé ou la température momentanée du corps variable, l'une et l'autre étant égales. Mais quand une fois on aura admis la dernière signification de t, il sera facile de voir qu'on pourra attribuer aux réservoirs de chaleur d'autres températures sans que l'expression

$$\int \frac{dQ}{T}$$

en éprouve aucune altération qui pourrait restreindre la validité de l'équation précédente.

Comme avec cette signification de t on n'a plus besoin de considérer séparément les réservoirs de chaleur, on a pris le parti de ne pas rapporter les quantités de chaleur à ceux-ci, mais au corps donné, en indiquant quelles quantités de chaleur le corps gagne ou perd successivement pendant ses modifications. Si l'on compte de nouveau les quantités de chaleur reçues comme positives et celles qui sont cédées comme négatives, il est clair que toutes les quantités de chaleur recevront des signes contraires à ceux qu'on leur donnerait par rapport à des réservoirs de chaleur dans le cas où une quantité de chaleur reçue par un corps variable proviendrait d'un réservoir de chaleur; mais cette circonstance ne pourra avoir aucune influence sur l'équation d'après laquelle la valeur de toute l'intégrale devra etre nulle. Il résulte de cette considération qu'en employant pour chaque quantité de chaleur dQ gagnée par un corps pendant ses modifications, ou cédée par lui quand dQ sera négatif, la température qu'il aura lui-même au moment de la réception ou de la cession, on pourra employer l'équation (II) sans avoir à examiner d'où la chaleur viendra ni où elle ira, pourvu que le mode d'opérations puisse être effectué en sens contraire.

Nous pourrons à présent, de la même manière que pour l'équation (I), mettre l'équation (II) sous une forme plus spéciale sous laquelle elle exprimera une propriété déterminée des corps, et nous obtiendrons alors l'équation connue que M. Clapeyron a déduite du théorème de Carnot dans une forme un peu différente [*]. A cet

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, tome XIX, et *Poggendorff's Annalen*, tome LIX, page 374.

effet, nous adopterons pour les espèces de changements toutes les mêmes conditions que celles au moyen desquelles les équations (2) et (3) ont été déduites de l'équation (I) et qui suffiront aussi pour la validité de l'équation (II). L'état du corps sera déterminé alors par sa température t et par son volume v, et, par suite, on pourra écrire

$$dQ = \frac{dQ}{dt}dt + \frac{dQ}{dv}dv.$$

La quantité

$$\int \frac{dQ}{T},$$

d'après l'équation (II), devant toujours être nulle quand t et v reprendront leurs valeurs initiales, il faudra que l'expression sous le signe d'intégration qui, d'après l'équation précédente, prendra la forme

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dt}dt + \frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dv}dv,$$

soit une différentielle exacte par rapport à t et v comme variables indépendantes, et, par suite, il faudra que les deux termes de cette expression satisfassent à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dv}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{T}\cdot\frac{dQ}{dt}\right),$$

de laquelle on déduira

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{dQ}{dv}\cdot\frac{\frac{dT}{dt}}{T^2} = \frac{1}{T}\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dt}\right),$$

ou

$$(12)\qquad \frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dT}{dt} = T\cdot\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{dQ}{dt}\right)\right].$$

Il ne restera plus qu'à y remplacer la quantité entre parenthèses par sa valeur connue d'après l'équation (3) pour qu'on trouve l'équation cherchée, savoir :

$$(13)\qquad \frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dT}{dt} = A\,.\,T\frac{dp}{dt},$$

qui pourra aussi, au moyen de la relation

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dT} \cdot \frac{dT}{dt},$$

être écrite ainsi :

$$(13\,a) \qquad \frac{dQ}{dv} = A \cdot T \frac{dp}{dT}.$$

En comparant ce résultat avec l'équation de M. Clapeyron mentionnée plus haut, on reconnaîtra la liaison de la fonction de température T introduite dans ce Mémoire avec celle de M. Clapeyron représentée par C et nommée la fonction de Carnot que j'ai employée moi-même dans mes premières Notices. On aura

$$(14) \qquad \frac{\frac{dT}{dt}}{T} = \frac{A}{C}.$$

Nous allons considérer maintenant les modes d'opérations non susceptibles d'être effectués en sens contraire.

Dans la démonstration de ce théorème, que dans un mode quelconque d'opérations susceptibles d'être effectuées en sens contraire, la somme algébrique de toutes les transformations doit être nulle, il a été prouvé d'abord que la somme ne saurait être *négative,* et il a été ajouté qu'elle ne saurait non plus être *positive,* parce que, dans ce cas-là, on n'aurait qu'à renverser le mode d'opérations pour avoir une somme négative. La première partie de cette démonstration subsistera sans modification pour les modes d'opérations non susceptibles d'être effectués en sens contraire, mais la seconde ne pourra y être appliquée. On obtiendra donc le théoreme suivant, qui subsistera, en général, pour tous les modes d'opérations d'un tour entier, en ce que ceux qui pourront être effectués en sens contraire y formeront le cas limite :

La somme algébrique de toutes les transformations, dans toute opération d'un tour entier, ne peut être que positive.

Toute transformation qui restera à la fin d'une opération d'un tour entier sans une transformation contraire, et qui, d'après ce théorème, ne pourra être que positive, sera nommée par nous une transformation *non compensée*.

Les opérations par lesquelles pourront s'effectuer des transformations non compensées sont d'espèces assez différentes, sinon par leur nature intime, du moins par leurs apparences extérieures. L'une des plus fréquentes est la transmission de chaleur qui se fait par le contact immédiat de deux corps à des températures différentes. Nous y rapportons, en outre, le développement de chaleur par friction, par un courant électrique qui a à surmonter la résistance du conducteur, et des cas dans lesquels une force en effectuant un travail n'aura pas à vaincre une résistance égale à elle-même, et, par suite, produira un mouvement d'une grande vitesse dont la force vive se transformera plus tard en chaleur. Nous aurons, par exemple, une opération de la dernière espèce quand un vase rempli de gaz sera mis en communication avec un vase vide, auquel cas une partie du gaz passera avec une grande vitesse dans l'autre vase et y reviendra à l'état de repos. Alors, après la dilatation, il y aura, comme on sait, dans toute la masse du gaz la même quantité de chaleur qu'auparavant, bien qu'il y aura des différences dans les deux états du gaz, et aucune quantité de chaleur ne sera transformée en travail d'une manière durable. Au contraire, le gaz ne pourra être comprimé et ramené à son volume initial sans que du travail n'y soit transformé en chaleur.

Il ressort du principe même qui a été exposé plus haut, de quelle manière on pourra déterminer la valeur d'équivalence des transformations non compensées qui seront produites par de telles opérations, et je ne veux pas m'arrêter à la discussion de cas spéciaux ici.

Pour conclure, nous devrons porter encore notre attention sur la fonction de température T que nous avons laissée jusqu'à présent tout à fait indéterminée, et celle-là aussi pourra être déterminée, sinon tout à fait sans hypothèse, du moins par une supposition qui aura un très-haut degré de vraisemblance.

J'entends la supposition accessoire déjà employée dans mon premier Mémoire, *qu'un gaz permanent, en se dilatant à une température constante, n'absorbera qu'une quantité de chaleur égale à celle qui sera consommée par la quantité de travail produite extérieurement*.

Cette supposition est confirmée par les nouvelles recherches de M. Regnault, et elle est vraisemblablement exacte au même degré que la loi de Mariotte et de Gay-Lussac, de façon que pour un gaz idéal, pour lequel cette dernière loi est supposée parfaitement exacte, l'autre supposition devra aussi être regardée comme exacte.

La quantité de travail extérieur que produit un gaz par une dilatation dv quand il a à vaincre toute la pression correspondante à sa force expansive est $= pdv$, et la quantité de chaleur absorbée est représentée par $\frac{dQ}{dv}dv$. On aura donc l'équation

$$\frac{dQ}{dv} = \text{A}.p,$$

et en substituant cette valeur de $\frac{dQ}{dv}$ dans l'équation (13), on trouvera

$$(15)\qquad \frac{\frac{d\text{T}}{dt}}{\text{T}} = \frac{\frac{dp}{dt}}{p}.$$

Or on a, d'après les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, la relation

$$p = \frac{a+t}{v}\cdot\text{constante},$$

dans laquelle a est la valeur réciproque du coefficient de dilatation des gaz permanents, de manière que quand la température t sera comptée en degrés centésimaux à partir du point de congélation, on aura, à très-peu près,

$$a = 273.$$

Quand ensuite, au moyen de cette équation, on éliminera la quantité p de l'équation (15), on obtiendra

$$(16)\qquad \frac{d\text{T}}{\text{T}} = \frac{dt}{a+t},$$

d'où l'on conclura, par voie d'intégration,

$$(17)\qquad \text{T} = (a+t).\text{constante}.$$

La valeur qu'on attribuera à la constante sera indifférente, parce que, en la changeant, toutes les valeurs d'équivalence changeront dans le même rapport, de telle sorte que les équivalences précédentes n'en seront pas altérées. Nous choisirons donc la valeur la plus commode, savoir l'unité; et de cette manière nous aurons

$$(18) \qquad T = a + t.$$

D'après cela, T ne sera autre chose que la température comptée de $-a$, ou à peu près de -273 degrés centésimaux ; et si nous regardons le point déterminé par $-a$ comme le zéro absolu de la température, T sera simplement *la température absolue*. C'est par cette raison que plus haut j'ai employé la notation T pour la valeur réciproque de la fonction $f(t)$. Par ce moyen, on évite tous les changements qu'autrement on eût été obligé d'apporter aux formes des équations après la détermination de la fonction, et, selon qu'on voudra admettre la supposition accessoire comme suffisamment exacte ou non, on pourra, à volonté, regarder T comme étant la température absolue ou comme étant une fonction de la température encore à déterminer; mais je crois qu'on pourra adopter la première manière de voir sans hésiter.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE

PAR M. REECH,
Directeur de l'École impériale du Génie maritime

« Paris, le 22 septembre 1854

» Monsieur,

» Il a été question dernièrement à l'Institut d'un nouveau systeme de cartes géographiques de M. Babinet, ayant pour objet de représenter la vraie surface d'une sphère sur un plan. Voyez si les remarques suivantes que cette question m'a suggérées peuvent figurer dans un des numéros du *Journal de Mathématiques*.

I.

» En désignant par

u la longitude d'un point situé sur une surface sphérique de rayon 1,

t la latitude du même point,

et en considérant un élément sphérique compris entre deux circonférences méridiennes u, $u + du$, et entre des parallèles t, $t + dt$, on a pour l'étendue de l'élément sphérique l'expression

$$dS = du\,dt \cos t. \tag{1}$$

» Les lignes méridiennes de la sphère étant supposées représentées sur un plan par une équation de la forme

$$\psi(x, y) = u, \tag{2}$$

et les parallèles de la sphère étant supposés représentés par une autre équation de la forme

$$\varphi(x, y) = t, \tag{3}$$

on aura à concevoir sur le plan deux courbes consécutives de l'espece ψ et deux courbes consécutives de l'espèce φ qui comprendront entre elles une petite étendue parallélogrammique généralement obliquangle.

» Les variables x, y étant supposées représenter des coordonnées rectangulaires, il ne sera pas difficile de trouver qu'une telle étendue parallélogrammique correspondante à deux accroissements donnés du, dt des variables indépendantes u, t sera mesurée par la formule

$$(4) \qquad dS = \frac{du\,dt}{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}}.$$

» Cette autre expression de l'aire dS devant être égale à celle de la formule (1), il s'ensuit que la détermination générale des fonctions ψ, φ dépendra de la résolution de l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\cos t}.$$

» La difficulté sera la même que celle dont je me suis occupé si longuement dans un Mémoire intitulé : *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur*, qui remplit les cahiers d'octobre, novembre et décembre 1853 de votre Journal (tome XVIII), et que M. Mallet-Bachelier a bien voulu ensuite tirer à part et publier comme ouvrage séparé : là, en lieu et place de la relation (1), je me servais de l'expression plus générale

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} dS &= q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) \\ &= \Gamma(t')f(t', u)\,du - \Gamma(t)f(t, u)\,du \\ &= du\,dt\,\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]. \end{aligned}\right.$$

» Donc, en recourant à ma *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur*, et en y faisant

$$\frac{d}{dt}\Gamma[(t)f(t, u)] = \cos t,$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\Gamma(t)f(t, u) = \sin t,$$
$$\Gamma(t)F(t, u) = u\sin t,$$

et en remplaçant, en outre, v, p par x, y, il n'y aura pas une seule de mes formules en $\Gamma(t) f(t, u)$ qui ne devienne directement applicable au problème de pure géométrie de M. Babinet.

II.

» Ainsi d'abord, d'après la formule (10), page 384 du tome XVIII de votre Journal, la question à résoudre ne sera pas autre que celle qui consistera à rendre une différentielle exacte une relation de la forme

$$dB = \sin t\, du - y\, dx, \tag{7}$$

et, d'après la formule (11), page 385, il faudra qu'on satisfasse à la condition

$$\frac{dy}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dt} = \cos t, \tag{8}$$

ou bien, d'après la formule (12), page 387, il faudra que l'on ait

$$\frac{du}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}, \tag{9}$$

ce sera l'équation (5) de tout à l'heure.

» Ou bien encore, d'après l'équation (13), page 390, en considérant x, t comme variables indépendantes, il faudrait que l'on ait

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}\cos t. \tag{10}$$

» Dans les équations (19) et suivantes, page 404, on devra faire

$$C = \Gamma(t)\, F(t, u) = \int \Gamma(t) f(t, u)\, du = \int \sin t\, du = u \sin t,$$

ce qui fera avoir les deux relations simultanées, dites complémentaires l'une de l'autre,

$$\left\{\begin{array}{l} dB = \sin t\, du - y\, dx, \\ dA = u \cos t\, dt + y\, dx. \end{array}\right. \tag{11}$$

» Au lieu de celles-là, on pourra, d'après les équations (19 *bis*), page 405, faire usage des deux relations correspondantes,

$$\left\{\begin{array}{l} dB_1 = \sin t\, du + x\, dy, \\ dA_1 = u \cos t\, dt - x\, dy, \end{array}\right. \tag{12}$$

les quantités A, B, A_1, B_1 satisfaisant aux équations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 &= A - xy,\\ B_1 &= B + xy,\\ A_1 + B_1 &= A + B = C = u\sin t. \end{aligned}\right.$$

Les formules (22) et (23), page 407, ne conduiront pas à d'autres résultats quand on y fera

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &R = \Gamma(t)\,F(t, u) = u\sin t,\\ &Q = B. \end{aligned}\right.$$

» Mais l'essentiel est que, d'après les résultats généraux, pages 506, 507, 508 et 509, on satisfera aux conditions (8), (9), (10),... ci-dessus, c'est-à-dire que l'on résoudra le problème de M. Babinet dans son entière généralité en désignant par A une fonction arbitraire en x, t, et en posant, d'après les équations (q), page 506,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dA(x,t)}{dx} = y,\\ &\frac{dA(x,t)}{dt} = u\cos t; \end{aligned}\right.$$

ou bien, en désignant par B une fonction arbitraire en x, u, et en posant, d'après les formules (a), page 507,

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dB(x,u)}{dx} = -y,\\ &\frac{dB(x,u)}{du} = \sin t. \end{aligned}\right.$$

» Un seul et même état de choses pourra d'ailleurs être représenté par les formules (15) et par les formules (16), pourvu que les fonctions A, B soient de telles natures que l'on ait

$$A(x, t) + B(x, u) = u\sin t.$$

» Cette relation devra se réduire à une pure identité quand on y subtituera la valeur de x en u et t tirée soit de la deuxième des formules (15), soit de la deuxième des formules (16).

En d'autres termes, la valeur de x tirée de la seconde des formules (15) et la valeur de x tirée de la seconde des formules (16) devront nécessairement être égales; par conséquent, les deux expressions

$$\frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = u \cos t,$$

$$\frac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \sin t,$$

devront être deux formes différentes d'une même équation générale entre les trois variables x, u, t.

» Je suppose, par exemple, que l'on me donne une relation quelconque

$$f(x, u, t) = 0.$$

» Cette équation étant supposée résoluble par rapport à u et par rapport à t, je puis la remplacer soit par

$$u = f_1(x, t),$$

soit par

$$t = f_2(x, u);$$

je mets la valeur de u dans la deuxième des formules (15), et je trouve

$$\frac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = f_1(x, t) \cos t;$$

d'où je conclus ensuite,

$$\mathrm{A}(x, t) = \int^t f_1(x, t) \cos t \, dt.$$

» En mettant, au contraire, la valeur de t dans la seconde des formules (16), je trouve

$$\frac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \sin(f_2(x, u)),$$

puis, en intégrant,

$$\mathrm{B}(x, u) = \int^u \sin\{f_2(x, u)\}\, du.$$

Telle sera la manière de trouver les deux fonctions correspondantes A, B dans chaque cas pour une relation donnée quelconque

$$f(x, u, t) = 0,$$

entre les trois variables x, u, t.

» Quand on déterminera les deux fonctions correspondantes A, B de cette manière, on trouvera

$$A(x, t) + B(x, u) = \int^t f_1(x, t) \cos t \, dt + \int^u \sin [f_2(x, u)] \, du,$$

et comme la variable x devra être regardée comme une constante dans chacune des intégrales du second membre, l'une par rapport à t, l'autre par rapport à u, il s'ensuit que le résultat sera le même que si l'on avait

$$A(x, t) + B(x, u) = \int^t u \cos t \, dt + \int^u \sin t \, du,$$

et que les variables t, u dépendissent directement l'une de l'autre d'après la relation donnée

$$f(x, t, u) = 0,$$

dans laquelle on regarderait aussi x comme une constante.

» Or, à ce point de vue, il est clair que le second membre de l'équation trouvée se réduira à

$$\int^t u \, d(\sin t) + \int^u \sin t \, du = \int d(u \sin t),$$

et qu'enfin on aura

$$A(x, t) + B(x, u) = u \sin t. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

» Le même procédé de calcul servira à trouver l'une des fonctions A, B quand l'autre sera donnée; car au moyen de celle des fonctions A, B qui sera donnée, on aura, soit d'après la seconde des formules (15), soit d'après la seconde des formules (16), une relation déterminée de l'espèce

$$f(x, u, t) = 0.$$

» Ce n'est pas tout; d'après les formules (q_1), (a_1), page 507, on résoudra aussi le problème en posant

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dA_1(y, t)}{dy} &= -x, \\ \frac{dA_1(y, t)}{dt} &= u \cos t, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathrm{B}_1(y,u)}{dy} &= +x,\\ \frac{d\mathrm{B}_1(y,u)}{du} &= \sin t, \end{aligned}\right.$$

et, d'après les formules (13) ci-dessus, on aura pour un seul et même état de choses, non-seulement

$$\mathrm{A}_1(y,t) + \mathrm{B}_1(y,u) = u\sin t,$$

mais encore

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1(y,t) &= \mathrm{A}(x,t) - xy,\\ \mathrm{B}_1(y,u) &= \mathrm{B}(x,u) + xy. \end{aligned}$$

» La manière la plus naturelle d'attaquer la question sera de regarder comme donnée l'une des équations (2), (3), par exemple l'équation (3),

$$\varphi(x,y) = t.$$

» En supposant ensuite que cette équation puisse être résolue par rapport à l'une des variables x, y, on aura, dans un cas,

$$y = \varphi_1(x,t),$$

et dans l'autre cas,

$$x = \varphi_2(y,t).$$

» Dans le premier cas, on trouvera, à l'aide de la première des formules (15),

$$\mathrm{A}(x,t) = \int^x \varphi_1(x,t)\,dx,$$

et la fonction A sera connue.

» La seconde des formules (15) deviendra

$$\frac{d}{dt}\int^x \varphi_1(x,t)\,dx = u\cos t,$$

et il ne s'agira plus que d'éliminer la variable t entre cette équation-là et la relation donnée

$$\varphi(x,y) = t,$$

pour quon trouve la relation cherchée

$$\psi(x, y) = u.$$

» Dans le deuxième cas, on trouvera, à l'aide de la premiere des formules (17),

$$A_1(y, t) = -\int^y \varphi_2(y, t)\,dy,$$

et la fonction A_1 sera connue.

» La seconde des formules (17) deviendra

$$-\frac{d}{dt}\int^y \varphi_2(y, t)\,dy = u\cos t,$$

et il ne s'agira plus que d'éliminer la variable t entre cette équation-là et la relation donnée

$$\varphi(x, y) = t,$$

pour qu'on trouve la relation cherchée

$$\psi(x, y) = u.$$

» En regardant, au contraire, comme donnée la relation

$$\psi(x, y) = u,$$

il faudra qu'on tâche de la mettre sous l'une des formes équivalentes

$$y = \psi_1(x, u),$$
$$x = \psi_2(y, u).$$

Dans le premier cas, on trouvera, à l'aide des formules (16),

$$B(x, u) = -\int^x \psi_1(x, u)\,dx,$$

$$-\frac{d}{du}\int^x \psi_1(x, u)\,dx = \sin t,$$

et, en substituant dans cette derniere la valeur supposée donnée

$$u = \psi(x, y),$$

on aura la relation cherchée

$$\varphi(x, y) = t$$

sous la forme

$$\varphi_1(x, y) = \sin t.$$

» Dans le deuxième cas, on trouvera, à l'aide des formules (18),

$$B_1(y, u) = \int^y \psi_2(y, u)\,dy,$$

$$\frac{d}{du}\int^y \psi_2(y, u)\,dy = \sin t,$$

et, en substituant dans cette dernière la valeur supposée donnée

$$u = \psi(x, y),$$

on aura aussi la relation cherchée

$$\varphi(x, y) = t$$

sous la forme

$$\varphi_1(x, y) = \sin t.$$

» Tel est l'usage qu'on aura à faire généralement des quatre especes de formules (15), (16), (17), (18).

III.

» S'il était question d'appliquer une pareille théorie non plus a une surface sphérique, mais à une surface elliptique ou à une autre surface quelconque, on aurait à déterminer préalablement la relation

$$dS = du\,dt\,r(t, u),$$

qui remplacerait l'équation (1) ci-dessus.

» Puis, en considérant qu'il s'agirait de satisfaire à l'une des relations

$$\frac{dy}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dy}{du}\frac{dx}{dt} = r(t, u),$$

$$\frac{du}{dx}\frac{dt}{dy} - \frac{dx}{dy}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{r(t, u)},$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{du}{dx}} = r(t, u),$$

. . . .

comme dans ma *Théorie générale des effets dynamiques de la Chaleur* à la page 509 du tome XVIII déjà cité, on déterminerait la quantité

$$\mathrm{R}(t, u) = \int\int r(t, u)\, dt\, du,$$

et l'on trouverait la solution du problème à l'aide d'un des quatre groupes des formules

$$(q)\quad \text{page 506,}\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{A}(x, t)}{dx} = y, \\ \dfrac{d\mathrm{A}(x, t)}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt} = \displaystyle\int r(t, u)\, du, \end{cases}$$

$$(a)\quad \text{page 507,}\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{B}(x, u)}{dx} = -y, \\ \dfrac{d\mathrm{B}(x, u)}{du} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du} = \displaystyle\int r(t, u)\, dt, \end{cases}$$

$$(q_1)\quad \text{page 507,}\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dy} = -x, \\ \dfrac{d\mathrm{A}_1(y, t)}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt} = \displaystyle\int r(t, u)\, du, \end{cases}$$

$$(a_1)\quad \text{page 507,}\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{dy} = +x, \\ \dfrac{d\mathrm{B}_1(y, u)}{du} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du} = \displaystyle\int r(t, u)\, dt, \end{cases}$$

dans lesquelles les fonctions A, B, A_1, B_1 joueraient précisément les mêmes rôles que dans les formules (15), (16), (17), (18) ci-dessus.

» Le but purement algébrique de la question serait de rendre une différentielle exacte soit l'une des deux formules complémentaires

$$(19)\quad \text{page 404,}\quad \begin{cases} d\mathrm{B} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\, du - y\, dx, \\ d\mathrm{A} = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt}\, dt + y\, dx, \end{cases}$$

soit l'une des formules supplémentaires de celles-là

$$(19\,\textit{bis})\quad \text{page 405,}\quad \begin{cases} d\mathrm{B}_1 = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\, du + x\, dy, \\ d\mathrm{A}_1 = \dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{dt}\, dt - x\, dy, \end{cases}$$

et ce but-là serait atteint par l'emploi de l'un quelconque des quatre groupes des formules qui précèdent.

IV.

» Pour faire des applications simples de cette théorie générale, je me reporte au cas d'une sphère et je suppose que l'on veuille faire en sorte que tous les parallèles de la sphère soient représentés par des droites parallèles à l'axe des x sur un plan.

» La question ne dépendra alors que des formules (15), (16), (17), (18), et même des formules (15) seulement, car en désignant par $k(t)$ une fonction arbitraire de la variable t, il faudra que l'on ait

$$(A) \qquad y = k(t),$$

et la première des formules (15) sera directement intégrable par rapport à x, ce qui fera trouver

$$(B) \qquad A(x, t) = xk(t) + k_1(t),$$

la lettre k_1 servant à désigner une autre fonction arbitraire de t.

» En différentiant ensuite la fonction A par rapport à t, on aura

$$\frac{dA(x, t)}{dt} = xk'(t) + k'_1(t),$$

et en substituant cette expression de la dérivée partielle de la fonction A dans la seconde des formules (15), on trouvera

$$(C) \qquad x = u\frac{\cos t}{k'(t)} - \frac{k'_1(t)}{k'(t)}.$$

» Cette expression de x et la relation donnée

$$y = k(t)$$

formeront la solution du problème.

» Le plus simple sera de faire

$$k_1(t) = 0,$$

et alors on aura

$$(D) \qquad \begin{cases} x = u\dfrac{\cos t}{k'(t)}, \\ y = k(t). \end{cases}$$

» En faisant, en outre,

$$k(t) = \sin t,$$

on trouvera

$$x = u,$$
$$y = \sin t.$$

» Cela pourra s'interpréter en disant que tous les points de la sphère devront d'abord être transportés dans leurs plans méridiens parallèlement à l'équateur sur une surface cylindrique circonscrite à la sphère dont les génératrices seront perpendiculaires au plan de l'équateur, et qu'ensuite la surface cylindrique devra être rabattue sur un plan.

» Toutes les lignes méridiennes de la sphère deviendront des droites perpendiculaires à la droite équatoriale comme dans le mode de projection de Mercator, mais les ordonnées y seront les sinus au lieu des tangentes de la latitude.

» La demi-sphère détachée par un plan méridien se trouvera représentée par un rectangle dont la hauteur d'un pôle à l'autre sera 2 et dont la longueur dans le sens de l'équateur sera le nombre $\pi = 3,1416$.

» En faisant

$$k(t) = t,$$

on aura

$$x = u \cos t,$$
$$y = t.$$

» C'est le système connu de Flamsteed.

» En désignant, dans ce cas-là, par t' le complément de la latitude, on aura les formules équivalentes

$$x = u \sin t',$$
$$y = \frac{\pi}{2} - t',$$

et quand on transportera encore l'axe des x parallèlement à lui-même à une distance $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$x = u \sin t',$$
$$y' = \frac{\pi}{2} - y = t'.$$

» Toutes les lignes méridiennes de la sphère deviendront des sinusoïdes menées par deux points fixes qui représenteront les deux pôles de la sphère à une distance π l'un de l'autre sur l'axe des y.

» La hauteur où la flèche de chacune des sinusoïdes sur l'axe des x sera égale à la longitude u de la ligne méridienne que représentera cette sinusoïde [et, par conséquent, les deux sinusoïdes qui représenteront les deux moitiés d'une circonférence méridienne de la sphère intercepteront sur l'axe des x une distance π égale à celle qu'il y aura d'un pôle à l'autre sur l'axe des y].

» Donc, quand une seule des courbes sinusoïdales aura été tracée, on pourra obtenir chacune des autres en faisant augmenter ou diminuer toutes les abscisses x de la courbe déjà tracée dans un rapport constant égal à celui de la longitude de la courbe cherchée à la longitude de la courbe donnée.

» Ce caractère appartient à tous les autres systèmes, car, quelle que puisse être la nature de la fonction $k(t)$, on aura, d'après les formules (D) pour deux longitudes différentes u, u' à une même distance y de la droite équatoriale,

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= u\,\frac{\cos t}{k'(t)}, \\ x' &= u'\,\frac{\cos t}{k'(t)}, \end{aligned} \right\} \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{x'}{x} = \frac{u'}{u},$$

comme pour les sinusoïdes dont il vient d'être question.

» Ainsi, *quand une courbe méridienne quelconque sera connue, on pourra tracer autour de nouvelles courbes méridiennes que l'on voudra en partageant chacune des abscisses x de la courbe connue en un même nombre de parties proportionnelles.*

» De cette loi de proportionnalité, il résulte manifestement que l'axe des y ne pourra rencontrer quelque part l'une des courbes méridiennes sans les rencontrer toutes au même point.

» Je dis à présent que *la courbe méridienne qui devra se rapporter à une longitude donnée quelconque u sur la sphère pourra être tracée arbitrairement sur le plan* des x, y pourvu qu'elle ne se confonde ni avec l'axe des y ni avec une parallèle à l'axe des x.

» Je suppose, en effet, qu'une relation donnée quelconque

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

doive être l'équation de la courbe méridienne pour une longitude donnée u sur la sphère, et pour aller de suite au plus simple, je suppose que cette équation puisse être mise sous la forme

$$(\mathrm{F}) \qquad x = f(y).$$

» En y substituant la première des formules (D), je trouve la condition

$$u \frac{\cos t}{k'(t)} = f(k(t)),$$

que je puis mettre sous la forme

$$(\mathrm{G}) \qquad \frac{u \cos t \, dt}{dy} = f(y),$$

et de laquelle ressortira toujours une relation parfaitement déterminée entre t, y, c'est-à-dire entre la latitude t de la sphère et la hauteur y par laquelle cette latitude devra être représentée sur le plan des x, y.

» Les seuls cas exceptionnels sont ceux où l'équation donnée

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

serait de l'une des formes particulières

$$x = 0, \quad y = \text{constante}.$$

» La lettre u servant à désigner une constante dans l'équation (G), cette équation sera directement intégrable, et l'on trouvera

$$u \sin t = \int_0^y f(y)\, dy.$$

» Mais l'intégrale du second membre ne sera pas autre chose que

$$\int_0^y x\, dy,$$

et représentera l'aire S de la courbe donnée depuis $y = 0$ jusqu'à y.

» Donc, en supposant que l'aire S soit connue en fonction de y, fût-ce même par des procédés graphiques de quadratures seulement, on aura la relation très-simple

$$(\mathrm{H}) \qquad u \sin t = \mathrm{S} = f_1(y),$$

au moyen de laquelle on pourra déterminer les latitudes t qui correspondront à toutes les hauteurs y le long de la courbe donnée.

» Il est d'ailleurs évident que du moment où l'on tracera une série de courbes u, u', etc., de manière qu'à toute commune hauteur y on ait, d'après la formule (E),

$$\frac{x'}{x} = \frac{u'}{u},$$

on aura aussi

$$\text{(I)} \qquad \frac{S'}{S} = \frac{u'}{u},$$

et que, par suite, la formule (H) fera trouver une même valeur pour t, n'importe à laquelle de ces courbes on voudra l'appliquer.

» La formule (H) n'est enfin que l'expression directement évidente de la condition initiale du problème; car le terme $u \sin t$ du premier membre est la mesure de l'étendue sphérique comprise entre les deux circonférences méridiennes o, u et entre les deux parallèles o, t, tandis que l'aire S du second membre est précisément celle par laquelle on s'était proposé de représenter une telle étendue sphérique sur le plan des x, y.

» De plus, on voit que les formules (E), (G), (I) continueront de subsister alors même que la tangente à la courbe donnée

$$y = f(x)$$

changerait brusquement de direction d'un point à un autre, pourvu que l'obliquité de cette tangente avec l'axe des y ne dépassât jamais un angle droit dans le sens positif comme dans le sens négatif.

» D'après l'équation (H), on ne parviendra à représenter la surface entière d'une demi-sphère depuis l'équateur jusqu'au pôle sur le plan des x, y qu'autant que l'aire S le long de la courbe donnée

$$x = f(y)$$

pourra augmenter jusqu'à la limite u qu'on obtiendra en faisant $t = \frac{1}{2}\pi$.

» Puis, quand cette condition sera remplie à une certaine hauteur y_1, il arrivera que pour la longitude donnée u le pôle de la sphère se trouvera représenté par l'extrémité de l'abscisse correspondante x_1 de la courbe.

» Il faudrait que la dernière abscisse x_1 pour une aire S_1 égale à u fût nulle pour que le pôle de la sphère pût être représenté par un point sur l'axe des y et pour que ce point-là devînt le commun point d'intersection de toutes les autres courbes méridiennes.

» Si, au lieu de me donner une courbe méridienne afin de me faire trouver la loi d'espacement des droites parallèles à l'axe des x pour les différentes valeurs de t, on me donnait, au contraire, la loi de cet espacement par une relation de la forme

$$t = \chi(y), \tag{K}$$

j'en déduirais

$$\frac{dt}{dy} = \chi'(y),$$

et en différentiant la formule (H), ou bien en remontant à la formule (G) qui est précisément cette différentielle, j'aurais à l'instant

$$f(y) = u\chi'(y)\cos t,$$

c'est-à-dire

$$x = \chi(y)\cos[\chi(y)] \tag{L}$$

pour l'équation générale de toutes les courbes méridiennes du système.

» Le tout ne dépendra que de la seule équation différentielle

$$u\cos t\, dt = x\, dy,$$

qui elle-même aurait pu être regardée comme une relation directement évidente dès le début de la question qu'il s'agissait de résoudre.

» Tel est le plus haut degré de généralité et de clarté en même temps qu'il soit possible de donner à cette théorie, alors que les parallèles d'une sphère devront être représentés par des lignes droites parallèles à l'axe des x sur un plan.

V.

» Une courbe méridienne quelconque pouvant être tracée arbitrairement sur le plan des x, y, et toutes les autres pouvant ensuite être déduites de celle-là au moyen d'une simple loi de proportionnalité entre les abscisses correspondantes x, x' à toute commune hauteur y, rien n'empêchera de tracer *une circonférence de cercle d'un rayon quelconque r pour représenter la courbe méridienne qui devra correspondre à telle longitude déterminée u qu'on voudra,* et alors toutes les autres courbes méridiennes seront des ellipses qui auront deux de leurs sommets aux points

$$y = +r, \quad y = -r,$$

où la circonférence donnée coupera l'axe des y. L'axe horizontal de ces ellipses sera proportionnel à la longitude que chacune d'elles devra représenter.

» Du moment où il n'y aura qu'une seule des courbes méridiennes qui pourra être une circonférence de cercle, il conviendra naturellement de réserver le choix de la forme circulaire pour celle des courbes méridiennes dont la longitude sera

$$u = +\tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ou} \quad u = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

et alors, en cherchant à déterminer l'aire S de la formule (H) dans cette circonférence d'un rayon égal à r, on sera conduit à faire usage de la relation auxiliaire

$$y = r\sin\theta, \tag{M}$$

au moyen de laquelle l'équation (H) se réduira à

$$\pi \sin t = \frac{r^2}{2}\{2\theta + \sin 2\theta\}. \tag{N}$$

» Telle sera la relation des latitudes t de la sphère avec les angles θ par lesquels ces latitudes devront être représentées à l'entour de la circonférence de rayon r sur le plan des x, y.

» La formule (N) ne donnera des valeurs réelles pour θ que jusqu'à la limite $t = \frac{1}{2}\pi$ qui correspondra aux deux pôles de la sphère, et à cette limite on trouvera la valeur extrême θ_1 des angles θ par la condition

$$\pi = \frac{r^2}{2}\{2\theta_1 + \sin 2\theta_1\}. \tag{O}$$

» Or la condition (O) fera trouver

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 < \frac{1}{2}\pi,\\ \theta_1 = \frac{1}{2}\pi,\\ \theta_1 > \frac{1}{2}\pi,\end{array}\right\}\quad\text{selon qu'on aura}\quad\left\{\begin{array}{l} r > \sqrt{2},\\ r = \sqrt{2},\\ r < \sqrt{2},\end{array}\right.$$

c'est-à-dire selon que la surface πr^2 de la circonférence de rayon r surpassera, égalera ou n'atteindra pas la surface 2π de la demi-sphère de rayon 1 qu'il s'agira de représenter sur le plan des x, y.

» Dans le premier cas, toute l'étendue sphérique de rayon 1 se trouvera représentée dans la circonférence de rayon r de chaque côté de l'axe des x jusqu'à une distance $y_1 = r\sin\theta_1$ de cet axe et les deux segments restants de la circonférence ne serviront à rien.

» Dans le deuxième cas, toute l'étendue sphérique remplira entièrement la circonférence de rayon r et les deux pôles de la sphère se trouveront représentés par les communs points d'intersection de toutes les courbes elliptiques avec l'axe des y. On aura, en un mot, le système qui a été imaginé par M. Babinet et dont la construction dépendra de la résolution de l'équation

$$(P)\qquad \pi\sin t = 2\theta + \sin 2\theta.$$

» Dans le troisième cas, la circonférence du rayon r ne pourra contenir toute l'étendue sphérique de rayon 1 qu'il s'agira de représenter sur un plan, mais elle en contiendra une partie, toute celle qui s'étendra de chaque côté de l'équateur jusqu'à une certaine latitude t qui dépendra de la condition

$$(Q)\qquad \sin t = \frac{r^2}{2},$$

à laquelle on sera conduit en faisant $\theta = \frac{1}{2}\pi$ dans l'équation (N).

» Les deux calottes restantes de l'étendue sphérique de rayon 1 pourront néanmoins être représentées aussi dans la circonférence de rayon r, mais d'une manière complétement renversée dans les deux segments de la circonférence qui dépendront de la valeur $\theta_1 > \frac{1}{2}\pi$ de la condition (O) et dont chacun aura déjà servi à représenter une partie de l'étendue sphérique située de chaque côté de l'équateur de la sphère depuis $t = 0$ jusqu'à la valeur de t de la condition (Q).

De l'influence des diaphragmes sur la grandeur des diamètres apparents du Soleil et de la Lune;

PAR M. ERNEST LIOUVILLE.

Les observations du temps des passages des étoiles, derrière les fils dont se compose le réticule d'une lunette méridienne, sont sujettes à une erreur, variable d'un astronome à l'autre, mais à peu près constante pour chacun en particulier, du moins pendant un certain intervalle de temps. Cette erreur, connue sous le nom d'*erreur personnelle en ascension droite*, a été pour M. Arago l'objet de recherches très-remarquables dont on peut lire le résumé dans le tome XXXVI des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, page 276: elle est la même pour toutes les observations de passage d'étoiles faites par le même astronome, et disparaît par conséquent lorsqu'il ne cherche que des différences d'ascension droite. D'après cela, en assimilant les deux bords du Soleil à deux étoiles, on pourrait être porté à croire que l'erreur personnelle disparaît dans l'estimation du diamètre de cet astre; il n'en est pourtant pas ainsi : l'erreur n'est pas la même aux deux bords; et, par suite, la grandeur apparente du diamètre du Soleil est altérée. Voilà donc une nouvelle classe d'erreurs personnelles, sur laquelle un beau Mémoire de M. Goujon, présenté à l'Institut le 12 février 1849, a fixé l'attention des astronomes.

Ayant entrepris de déterminer, par le temps qui s'écoule entre le passage au méridien du premier et du second bord du Soleil, la grandeur apparente du diamètre de cet astre à sa distance moyenne de la Terre, « je me suis aperçu, dit M. Goujon, après avoir discuté un certain nombre d'observations, que chaque astronome avait une manière particulière d'estimer le diamètre du Soleil; qu'en d'autres termes, pour chacun d'eux, *la différence d'ascension droite entre les deux bords n'était pas la même :* le résultat m'a paru assez intéressant pour m'engager à continuer mon travail afin de mettre hors de doute cette nouvelle erreur personnelle. » Le Mémoire de M. Goujon a obtenu, sur un Rapport de M. Mauvais en date du 30 mai 1853, l'approbation de l'Académie des Sciences.

Dans ce Rapport, M. Mauvais examine une objection qu'on avait opposée aux conclusions de M. Goujon, et pour la réfuter il donne quelques-uns des résultats auxquels nous étions arrivés, M. Charles Mathieu et moi, dans des recherches que nous avions entreprises (à sa demande et à celle de M. Goujon lui-même, alors retenu par d'autres occupations) sur l'influence que pouvaient exercer dans l'estimation du diamètre apparent du Soleil les diaphragmes avec lesquels les astronomes ont l'habitude de diminuer l'ouverture de l'objectif pour atténuer l'ardeur des rayons solaires concentrés au foyer de la lunette. Nous avons trouvé, M. Charles Mathieu et moi, par des observations à l'équatorial (auxquelles j'avais joint quelques résultats plus anciens obtenus à la lunette méridienne), que cette circonstance ne fait pas naître d'erreur nouvelle, et qu'il faut chercher ailleurs la cause de la différence qui existe entre les diamètres du Soleil obtenus par divers astronomes.

Je suis revenu depuis sur ce sujet; et, plus tard encore, j'ai étendu à la Lune les résultats obtenus pour le Soleil. C'est l'ensemble de ces recherches, dont une partie a paru déjà dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séances du 30 mai 1853 et des 6 février et 21 août 1854), que je vais donner ici.

I. — *Observations faites, avec M. Charles Mathieu, à l'équatorial de Gambey.*

Si l'on diminue, au moyen d'un diaphragme, l'ouverture de la lunette employée à observer une étoile, cette étoile, au lieu de demeurer un point brillant d'où paraissent émerger des rayons lumineux, acquiert, au contraire, un disque d'autant mieux défini que l'ouverture a été rendue plus petite. Mais M. Arago s'est assuré (*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1852, page 499) que le diamètre apparent des planètes n'augmente pas comme celui des étoiles, quand ces astres sont observés avec un objectif réduit. En est-il de même pour le Soleil?

Afin de résoudre ce problème, nous avons, M. Charles Mathieu et moi, à chaque jour favorable du mois de mai 1853, observé à l'équatorial de Gambey le diamètre du Soleil, avec l'objectif libre de 100 millimètres d'ouverture, et avec des diaphragmes dont l'ouverture variait de 60 à 12 millimètres. Toutes nos séries d'observations ont été faites près du méridien dans le but de nous mettre à l'abri des erreurs qui auraient pu naître du voisinage de l'horizon, et elles ont été assez courtes pour qu'il ne fût pas nécessaire de tenir compte de la variation de grandeur du diamètre apparent du Soleil pendant leur durée; nous avons en outre renfermé, le plus souvent, chaque observation faite avec un diaphragme entre des observations faites sans diaphragme.

Je me bornerai à rapporter nos observations du 5 mai 1853 :

	SANS DIAPHRAGME. Ouverture : 100 millimètres.		AVEC DIAPHRAGME. Ouverture : 60 millimètres.	
	Liouville.	Mathieu.	Liouville.	Mathieu.
Durée du passage..	m s 2.12,70 12,87 12,87	m s 2.12,33 12,44 12,36 12,44	m s 2.12,80 12,83 12,84	m s 2.12,13: 12,43 12,30 12,44
Moyenne.....	2.12,81	2.12,39	2.12,82	2.12,33

On voit que mon estimation du diamètre du Soleil observé avec ou sans diaphragme surpasse celle de M. Charles Mathieu dans les mêmes circonstances. Il en a été ainsi dans toutes nos séries : mes diamètres sont généralement plus grands que ceux de M. Charles Mathieu de 3 à 4 *dixièmes* de seconde.

Cette différence permanente entre l'estimation du diamètre du Soleil par deux astronomes opérant au même instant et dans des conditions identiques confirme d'abord d'une manière frappante la réalité de l'erreur personnelle dont M. Goujon s'est occupé. Mais de plus on voit que l'emploi des diaphragmes ne joue ici aucun rôle sensible. La différence entre mes deux diamètres observés avec et sans diaphragme dans la série citée plus haut n'est que de $+ 0^s,01$, et pour M. Charles Mathieu de $- 0^s,06$, ou $0^s,00$ en ne tenant pas compte de l'observation marquée douteuse; il ne s'agit plus ici que de *centièmes* de seconde.

Le tableau suivant offre du reste la comparaison des diamètres que nous avons obtenus avec diverses ouvertures; il contient, pour chaque diaphragme, la moyenne des différences entre le diametre observé avec ce diaphragme et le diamètre D trouvé *au même moment* sans diaphragme.

	OUVERTURE.	DURÉE DU PASSAGE OBSERVÉ.	
		C. Mathieu.	E. Liouville.
Sans diaphragme.........	100 millimètres.	D	D
Premier diaphragme.......	60 millimètres.	D — 0,08	D — 0,03
Deuxième diaphragme......	41 millimètres.	D + 0,01	D — 0,05
Troisième diaphragme......	24 millimètres.	D + 0,07	D — 0,05
Quatrième diaphragme......	12 millimètres.	D + 0,02	D + 0,00

Ces petites différences entre les durées de passage obtenues avec les diverses ouvertures n'offrent aucune continuité; elles restent, d'ailleurs, dans les limites des erreurs accidentelles d'observation. Il résulte donc de nos expériences, que les diaphragmes n'ont point d'influence sensible sur la grandeur apparente du disque du Soleil, du moins tant que l'on se renferme dans les limites qu'exigent la netteté de l'image et la possibilité de l'observation complète.

II. — *Observations faites à la lunette méridienne de Gambey.*

J'ai désiré cependant soumettre à une nouvelle vérification les résultats précédents, ou plutôt j'ai voulu continuer un travail que j'avais entrepris sur le même sujet dès le mois de mars 1853. Cette fois, je me suis servi de la lunette méridienne de Gambey et des deux diaphragmes qui y sont attachés, dont les ouvertures sont respectivement de 71 et 35 millimètres, l'objectif libre ayant 152 millimètres. Les observations méridiennes étant susceptibles d'une bien plus grande précision, j'en ai préféré l'emploi, quoiqu'elles ne me permissent plus de faire usage d'un nombre aussi varié d'ouvertures.

Afin d'éliminer autant que possible les erreurs qui pouvaient provenir d'un changement dans ma manière d'estimer le diamètre du Soleil, j'ai eu soin d'entremêler les observations faites sans diaphragme et celles faites avec les ouvertures de 35 et 71 millimètres. Le diamètre du Soleil observé avec l'objectif libre m'a servi, comme précédemment, de terme final de comparaison; mais pour ramener à ce diamètre normal les diamètres obtenus avec les deux diaphragmes, j'ai employé comme intermédiaire les durées de passage du diamètre du Soleil au méridien inscrites pour chaque jour de l'année dans le *Nautical Almanac ;* j'ai pu le faire sans inconvénient, le diamètre déduit de mes observations étant le même, à deux centièmes de seconde près. Voici d'ailleurs le détail de ces comparaisons de diamètres directement observés aux diamètres calculés dans l'éphéméride anglaise :

SANS DIAPHRAGME (Ouverture : 152 millimètres).

DATES.	DURÉE du passage observé.	*Nautical Almanac.*	EXCÈS de la première valeur sur la deuxième.
	m s	m s	s
1853. Mars 27	2. 8,90	2. 8,90	0,00
Avril 4	2. 9,16	2. 9,08	+ 0,08
19	2.10,48	2.10,42	+ 0,06
Mai 5	2.12,62	2.12,72	— 0,10
15	2.14,44	2.14,38	+ 0,06
Sept. 20	2. 8,24	2. 8,14	+ 0,10
21	2. 8,24	2. 8,16	+ 0,08
Oct. 9	2. 9,46	2. 9,62	— 0,16
10	2. 9,64	2. 9,76	— 0,12
14	2.10,30	2.10,36	— 0,06
21	2.11,52	2.11,58	— 0,06
22	2.11,58	2.11,78	— 0,20
25	2.12,30	2.12,38	— 0,08
26	2.12,52	2.12,60	— 0,08
27	2.12,82	2.12,82	0,00
30	2.13,56	2.13,48	+ 0,08
Nov. 5	2.15,12	2.14,86	+ 0,26
12	2.16,58	2.16,54	+ 0,04
25	2.19,64	2.19,48	+ 0,16
Déc. 20	2.22,49	2.22,56	— 0,07
29	2.22,70:	2.22,38	+ 0,32:
31	2.22,32	2.22,24	+ 0,08
1854. Janv. 16	2.20,02	2.20,00	+ 0,02
26	2.17,90	2.17,88	+ 0,02
		Moyenne. .	= + 0,02

PREMIER DIAPHRAGME (Ouverture : 71 millimètres).

DATES.		DURÉE du passage observé.	*Nautical Almanac.*	EXCÈS de la première valeur sur la deuxième.
		m s	m s	s
1853. Mars.	1	2.10,68	2.10,78	− 0,10
	10	2. 9,86	2. 9,68	+ 0,18
	11	2. 9,60	2. 9,58	+ 0,02
	12	2. 9,32	2. 9,48	− 0,16
	18	2. 8,94	2. 9,08	− 0,14
	19	2. 9,02	2. 9,04	− 0,02
	20	2. 9,04	2. 9,00	+ 0,04
	22	2. 8,98	2. 8,94	+ 0,04
	28	2. 8,94	2. 8,90	+ 0,04
	29	2. 8,92	2. 8,92	0,00
	30	2. 8,94	2. 8,92	+ 0,02
Mai	27	2.16,04	2.16,20	− 0,16
Juin	14	2.17,88	2.17,82	+ 0,06
	16	2.17,82	2.17,88	− 0,06
	17	2.18,00	2.17,92	+ 0,08
Juill.	1	2.17,72	2.17,54	+ 0,18
	6	2.16,98	2.17,10	− 0,12
	7	2.17,22	2.17,00	+ 0,22
	24	2.14,60	2.14,62	− 0,02
	27	2.14,16	2.14,12	+ 0,04
	31	2.13,44	2.13,44	0,00
Août	2	2.13,18	2.13,08	+ 0,10
	4	2.12,66	2.12,74	− 0,08
	7	2.12,12	2.12,22	− 0,10
	8	2.12,02	2.12,06	− 0,04
	10	2.11,94	2.11,74	+ 0,20
	11	2.11,78	2.11,56	+ 0,22
Sept.	3	2. 8,72	2. 8,64	+ 0,08
	6	2. 8,43	2. 8,42	+ 0,01
	10	2. 8,30	2. 8,24	+ 0,06
	11	2. 8,22	2. 8,20	+ 0,02
	12	2. 8,10	2. 8,16	− 0,06
	13	2. 8,20	2. 8,14	+ 0,06
	15	2. 7,86	2. 8,12	− 0,26
	16	2. 8,26	2. 8,10	+ 0,16
	17	2. 8,00	2. 8,12	− 0,12
	18	2. 8,16	2. 8,12	+ 0,04
	19	2. 8,18	2. 8,14	+ 0,04
	24	2. 8,12	2. 8,26	− 0,14
Déc.	25	2.22,76	2.22,54	+ 0,22
			Moyenne.	= + 0,01

SECOND DIAPHRAGME (Ouverture : 35 millimètres).

DATES.	DURÉE du passage observé.	*Nautical Almanac.*	EXCÈS de la première valeur sur la deuxième.
	m s	m s	s
1853. Avril 24	2.11,12	2.11,08	+ 0,04
25	2.11,16	2.11,22	— 0,06
30	2.11,98	2.11,94	+ 0,04
Mai 13	2.14,08	2.14,06	+ 0,02
23	2.15,68	2.15,64	+ 0,04
Oct. 23	2.11,98	2.11,98	0,00
24	2.12,18	2.12,18	0,00
Nov. 1	2.13,98	2.13,94	+ 0,04
4	2.14,82	2.14,62	+ 0,20
9	2.16,00	2.15,82	+ 0,18
17	2.17,58	2.17,72	— 0,14
Déc. 2	2.20,76	2.20,80	— 0,04
3	2.21,16	2.20,96	+ 0,20
1854. Janv. 25	2.17,74	2.18,10	— 0,36
		Moyenne.	= + 0,01

Le diamètre du Soleil à sa distance moyenne de la Terre, adopté dans le *Nautical Almanac*, étant de $2^{m}\,8^{s},24$, il s'ensuit que ce même diamètre déduit de mes observations à la lunette méridienne de Gambey est de :

	OUVERTURE.	DIAMÈTRE du Soleil.	NOMBRE des observations.
		m s	
Sans diaphragme.	152 millimètres.	2.8,26	24
Premier diaphragme.	71 millimètres.	2.8,25	40
Second diaphragme.	35 millimètres.	2.8,25	14

La différence entre ces nombres, $\frac{1}{100}$ de seconde, est de l'ordre des quantités dont on ne peut répondre.

Il résulte de là, comme nous l'avions déjà conclu, M. Charles Mathieu et moi, de nos observations à l'équatorial de Gambey, que l'emploi des diaphragmes n'introduit pas, pour chaque astronome, une erreur nouvelle dans l'estimation du diamètre du Soleil, et que, par conséquent, on ne saurait attribuer à cette cause la différence qui existe entre les diamètres de cet astre conclus d'observations faites par divers astronomes.

III. — *Observations faites sur le disque de la Lune avec l'équatorial de M. Brunner.*

Après avoir quitté l'Observatoire de Paris (par suite de la mort de M. Arago et de la nouvelle constitution de cet établissement scientifique), j'ai voulu, pour compléter mon travail, étendre à la Lune les expériences que j'avais faites sur le Soleil. A cet effet, j'ai employé une lunette équatoriale de 104 millimètres d'ouverture, que M. Brunner a bien voulu mettre à ma disposition. Les deux diaphragmes dont je me suis servi avaient respectivement 71 et 35 millimètres d'ouverture.

Ne pouvant que dans des circonstances exceptionnelles opérer sur le disque entier de la Lune, j'ai mesuré la distance d'une tache à l'un des bords, avec et sans diaphragme. J'ai eu soin, d'ailleurs, de renfermer les observations faites avec l'un des diaphragmes entre des observations faites à l'aide de l'objectif libre, et de ne comparer les mesures de distance d'une tache au bord, prises avec une ouverture réduite, qu'aux mesures obtenues, *à la même époque*, sans diaphragme. Ces expériences, répétées pendant les mois de juin, juillet et août 1854, m'ont donné les résultats suivants :

	OUVERTURE.	DURÉE du passage.	NOMBRE des observations.
Sans diaphragme..........	104 millimètres.	D	55
Premier diaphragme........	71 millimètres.	D — 0,01	36
Second diaphragme........	35 millimètres.	D + 0,01	34

Ainsi, pour la Lune comme pour le Soleil, les différences sont de l'ordre des quantités dont on ne peut répondre, et l'influence des diaphragmes est insensible.

J'ajouterai, pour donner une idée de la précision à laquelle on peut arriver avec l'équatorial de M. Brunner, les observations faites le 5 juin 1854 à l'aide de cet instrument :

	SANS DIAPHRAGME. Ouverture : 104 millimètres.	AVEC DIAPHRAGME. Ouverture : 35 millimètres.
Durée du passage	1.33,44 (m s)	1.33,17 (m s)
	1.33,20	1.33,36
	1.33,27	1.33,30
	1.33,10	1.33,20
	1.33,47	1.33,40
Moyenne.........	1.33,30	1.33,29

En résumé, les diamètres apparents de la Lune, du Soleil et des planètes ne changent pas quand on les observe avec une lunette à ouverture réduite; les diamètres apparents des étoiles augmentent, au contraire.

IV. — *Observations micrométriques.*

Dans toutes les observations sur le diamètre du Soleil et de la Lune que nous avons rapportées jusqu'ici, on s'est servi du temps comme mesure; je dois maintenant ajouter que des observations micrométriques sur chacun de ces astres m'ont donné les mêmes résultats. Ayant placé, lorsque l'objectif de la lunette était entièrement libre, le centre d'une tache du Soleil ou de la Lune sous le fil mobile de l'équatorial, et rendu un des bords tangent extérieurement au fil fixe, j'ai reconnu que le bord ne s'éloignait point du fil lorsque l'ouverture de la lunette était réduite ensuite au moyen d'un diaphragme : l'emploi de ce diaphragme ne diminuait donc pas la distance de la tache au bord. Rendant libre de nouveau l'objectif de la lunette, et laissant passer un simple point lumineux de l'autre côté du fil fixe (le fil mobile cachant toujours le centre de la tache), j'ai constaté également que le point lumineux ne s'agrandissait pas lorsqu'on plaçait un diaphragme sur l'objectif; ainsi ce diaphragme n'augmentait pas la distance de la tache au bord : mais nous venons de dire qu'il ne la diminuait pas non plus ; il n'exerçait donc aucune influence sur cette distance, ni, par conséquent, sur la grandeur apparente du diamètre.

NOTE

Sur une formule pour les différentielles à indices quelconques, à l'occasion d'un Mémoire de M. Tortolini;

Par M. J. LIOUVILLE.

Dans le XXI^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, et plus tard au tome XII du Journal de M. Crelle, j'ai donné la formule suivante :

$$(1) \qquad \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = (-1)^\mu\,\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu,$$

où l'indice μ peut avoir une valeur positive quelconque, et même une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive. J'établis l'équation (1) de plusieurs manières, mais sous la condition que dans le développement de $\varphi(x)$ en exponentielles les exposants soient négatifs, ou du moins aient tous leur partie réelle négative, de sorte que dans l'équation

$$\varphi(x) = \sum A e^{-ax},$$

qui exprime ce développement, toutes les quantités a doivent être de la forme

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0.$$

On se rappelle que je définis les différentielles et les intégrales, à indice quelconque μ, d'une fonction y de la variable indépendante x, au moyen du développement de cette fonction en série d'exponentielles. Ayant

$$y = \sum A_m e^{mx},$$

je pose

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \sum A_m e^{mx} m^\mu$$

et

$$\int^{\mu} y\, dx^{\mu} = \sum \mathrm{A}_m \frac{e^{mx}}{m^{\mu}}.$$

Cette définition, qui repose sur la considération des séries, a sans doute ses inconvénients, que je connais fort bien. On a pu et on pourra en présenter d'autres, et dès lors arriver à des résultats en apparence différents des miens, sans que j'aie le droit ni la pensée de m'en étonner. Peut-être reviendrai-je moi-même un jour sur ce sujet en me plaçant à un point de vue tout différent de celui sous lequel je l'ai envisagé d'abord. Mais on doit du moins reconnaître qu'en prenant pour point de départ les séries d'exponentielles on a étendu, sans en altérer en rien la pureté, la belle analogie des puissances et des différences que d'autres notions amoindriraient peut-être ou rendraient en tout cas moins intuitive, moins évidente. N'est-ce pas du reste à l'occasion de cette analogie, qu'il venait de découvrir, que Leibnitz a songé aux différentielles à indices quelconques? Et n'est-ce pas sur l'exponentielle e^{mx} qu'il en a donné un premier exemple, en présentant $e^{mx}m^{\mu}$ comme étant, quel que soit μ, la différentielle à indice μ ou l'intégrale à indice $-\mu$ de cette exponentielle? Je l'affirme sans hésiter : c'est en conservant ainsi les grandes liaisons des choses qu'on se prépare des méthodes propres à l'invention, ou tout au moins des inductions suivies et puissantes, auxiliaires souvent indispensables des méthodes rigoureuses, et qu'on ne doit pas dédaigner, même en mathématiques, dussent les résultats auxquels on est ainsi conduit avoir parfois besoin d'une vérification *a posteriori* qu'on demandera à d'autres procédés.

Quoi qu'il en soit, l'équation (1) est une conséquence immédiate de ma définition des intégrales à indice μ. Ayant

$$\varphi(x) = \sum \mathrm{A}\, e^{-ax}$$

avec

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0,$$

et la partie réelle de μ étant positive, j'en conclus

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\, \alpha^{\mu-1}\, d\alpha = \sum \mathrm{A}\, e^{-ax} \int_0^{\infty} e^{-a\alpha}\, \alpha^{\mu-1}\, d\alpha.$$

Mais

$$\int_0^{\infty} e^{-a\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}.$$

Donc

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\sum \mathrm{A}\,\frac{e^{-ax}}{a^{\mu}}.$$

Et puisque, par la définition,

$$\int^{\mu} \varphi(x)\,dx^{\mu} = \frac{1}{(-1)^{\mu}}\sum \mathrm{A}\,\frac{e^{-ax}}{a^{\mu}},$$

il s'ensuit finalement,

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = (-1)^{\mu}\,\Gamma(\mu)\int^{\mu} \varphi(x)\,dx^{\mu};$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si, en supposant toujours

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0,$$

on considérait une fonction $f(x)$ se développant en série sous la forme

$$f(x) = \sum \mathrm{A}\,e^{ax},$$

où la partie réelle des exposants est positive, la même méthode donnerait

$$\int^{\mu} f(x)\,dx^{\mu} = \sum \mathrm{A}\,\frac{e^{ax}}{a^{\mu}},$$

et

$$\int_0^{\infty} f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \sum \mathrm{A}\,e^{ax}\int_0^{\infty} e^{-a\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\infty} f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\sum \mathrm{A}\,\frac{e^{ax}}{a^{\mu}},$$

par suite

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\int^{\mu} f(x)\,dx^{\mu}.$$

La formule (2) est le complément naturel de la formule (1). Je n'avais donné que la formule (1) dans les Mémoires déjà cités; elle suffisait aux applications que j'avais en vue. Mais M. Alfred Serret ayant eu besoin de la formule (2), dans des recherches sur l'intégration de certaines équations différentielles, l'a démontrée (au tome IX du présent Journal, page 205) comme je viens de le faire, c'est-à-dire comme j'avais démontré auparavant la formule (1) dans le *Journal de l'École Polytechnique ;* ce dont il a eu du reste soin d'avertir. Au surplus, on fait coïncider la formule (2) avec la formule (1), en remplaçant $f(x)$ par $\varphi(-x)$, puis x par $-x$.

Dans un intéressant travail sur les *intégrales générales de quelques équations aux dérivées partielles à coefficients constants,* qu'il a inséré dans la seconde partie du tome XXV des *Mémoires de la Société italienne* résidente à Modène, et dont il m'a fait l'honneur de m'envoyer un exemplaire que je reçois à l'instant, M. Tortolini s'est proposé (nº 16) de tirer de l'analogie des puissances et des différences une formule propre à exprimer l'intégrale à indice $\frac{1}{2}$ d'un fonction $f(x)$. En désignant cette intégrale par u, de manière que pour nous

$$u = \int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}},$$

M. Tortolini arrive à la formule suivante :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr.$$

où l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ est relative à y, ce qui permet d'écrire aussi

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr.$$

M. Tortolini compare ensuite son résultat à celui que donnerait ma formule (1) en y posant $\mu = \frac{1}{2}$, et il observe qu'il y a désaccord, ce que la présence du facteur $\sqrt{-1}$ provenant de $(-1)^{\mu}$ rend de suite évident. Mais M. Tortolini ne parle pas de la formule (2), et c'est pourtant de celle-là seule qu'il aurait dû rapprocher la sienne d'après les conditions implicitement imposées à la nature de la fonction f

par son analyse. Or pour $\mu = \frac{1}{2}$, la formule (2) nous donne

$$\int^{\frac{1}{2}} f(x)^{\frac{1}{2}} dx^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x - \alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

puisque

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

et c'est précisément à cela que se réduit la formule

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr.$$

Posez en effet

$$r = 2y\sqrt{\alpha}, \quad dr = \frac{y\, d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

et cette formule deviendra

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} f(x - \alpha) \frac{y\, d\alpha}{\sqrt{\alpha}}\, dy;$$

l'intégration relative à y s'effectue alors, et comme

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y\, dy = \frac{1}{2},$$

on a définitivement

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x - \alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

comme ci-dessus.

Voici du reste en deux mots la méthode de M. Tortolini : je remplace à mon ordinaire l'analogie des puissances et des différences par la considération équivalente du développement en série d'exponentielles. On a

$$f(x) = \sum \mathrm{A}\, e^{ax}, \quad \int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}} = \sum \mathrm{A} \frac{e^{ax}}{\sqrt{a}}.$$

Mettez pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$ sa valeur déduite des deux équations

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \int_0^\infty e^{-r\sqrt{a}}\, dr, \quad e^{-r\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{ar^2}{4y^2}\right)} dy.$$

qui donnent

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} . e^{-\frac{ar^2}{4y^2}} dy\, dr,$$

et la formule de M. Tortolini s'ensuivra, mais sous l'hypothèse visiblement nécessaire que a soit de la forme

$$p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0.$$

Cette méthode ne diffère de celle qui donnerait la formule (2) pour le cas de $\mu = \frac{1}{2}$, qu'en ce que M. Tortolini a employé une valeur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ en intégrale double, tandis que nous avons pris la valeur en intégrale simple,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

En résumé, la formule de M. Tortolini s'accorde parfaitement avec nos principes, ou plutôt elle en découle, et cela devait être, puisque le point de départ de l'habile géomètre italien est au fond le même que le nôtre.

Remarques sur la théorie des lignes de courbure, et spécialement sur la plus courte distance des deux normales infiniment voisines dont l'une passe par un ombilic;

PAR M. JULES VIEILLE.

Nous reprendrons d'abord sommairement la mise en équation des lignes de courbure, en suivant une marche différente de celle qu'on adopte d'ordinaire, et qui fera mieux ressortir l'ordre infinitésimal de la plus courte distance de deux normales consécutives.

Les équations de la normale au point (x, y, z) d'une surface

$$z = F(x, y)$$

sont de la forme

$$x' = -pz' + \alpha,$$
$$y' = -qz' + \beta,$$

en posant

$$\alpha = x + pz, \quad \beta = y + qz, \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

et désignant par x', y', z' les coordonnées courantes.

Les équations de la normale menée par un point voisin de la surface, et dont nous désignerons les coordonnées par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, sont

$$x' = -(p + \Delta p)z' + \alpha + \Delta\alpha,$$
$$y' = -(q + \Delta q)z' + \beta + \Delta\beta;$$

et la plus courte distance δ des deux normales a pour expression

$$\delta = \frac{\Delta q \Delta\alpha - \Delta p \Delta\beta}{\sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2 + (p\Delta q - q\Delta p)^2}}.$$

Le dénominateur est du même ordre infinitésimal que le plus grand des deux accroissements arbitraires Δx, Δy, ou du premier ordre; tandis que le numérateur est, *en général,* du second ordre.

Par conséquent, δ est, en général, du premier ordre infinitésimal.

Mais on peut demander quelle dépendance il faudrait établir entre Δx et Δy, ou, ce qui revient au même, quelle ligne il faudrait tracer sur la surface pour que, en assujettissant le point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ à la décrire, la plus courte distance δ fût constamment infiniment petite d'un ordre supérieur au premier.

La ligne qui jouit de cette propriété s'appelle *ligne de courbure.*

Comme elle doit être située sur la surface

$$z = \mathrm{F}(x, y),$$

cette ligne sera complètement déterminée, si l'on assigne une seconde équation entre les coordonnées de ses différents points, par exemple celle qui lie y à x et représente sa projection sur le plan des (x, y). A cet effet, on développe d'abord Δp, Δq, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ en séries ordonnées suivant les différentielles des divers ordres, prises par rapport à la variable indépendante x,

$$\Delta p = dp + \frac{1}{1.2} d^2 p + \frac{1}{1.2.3} d^3 p + \ldots,$$

$$\Delta q = dq + \frac{1}{1.2} d^2 q + \frac{1}{1.2.3} d^3 q + \ldots,$$

$$\Delta \alpha = d\alpha + \frac{1}{1.2} d^2 \alpha + \frac{1}{1.2.3} d^3 \alpha + \ldots,$$

$$\Delta \beta = d\beta + \frac{1}{1.2} d^2 \beta + \frac{1}{1.2.3} d^3 \beta + \ldots,$$

et substituant dans le numérateur de δ, puis groupant les termes de même ordre, il vient

$$\delta = \frac{(dq\, d\alpha - dp\, d\beta) + \frac{1}{1.2}(dq\, d^2\alpha + d\alpha\, d^2 q - dp\, d^2\beta - d\beta\, d^2 p) + \ldots}{\mathrm{A}\, dx};$$

A désigne une quantité *finie,* qu'il est inutile de développer.

Pour que δ satisfasse à la condition d'être d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, il faut et il suffit que le terme du second ordre disparaisse du numérateur, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad dq\, d\alpha - dp\, d\beta = 0;$$

cette équation se transforme, eu égard aux relations

$$d\alpha = dx + p\, dz + z\, dp, \quad d\beta = dy + q\, dz + z\, dq,$$
$$dz = p\, dx + q\, dy, \quad dp = r\, dx + s\, dy, \quad dq = s\, dx + t\, dy,$$

et devient

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0.$$

Les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ que l'on tire de cette équation, font connaître les projections sur le plan des x, y des tangentes aux lignes de courbure issues du point (x, y, z). Il y a donc deux directions suivant lesquelles on peut passer d'un point de la surface à un point infiniment voisin, pour que la plus courte distance des normales en ces points soit d'un ordre infinitésimal supérieur au premier. L'équation précédente est identique avec celle qui détermine les tangentes aux deux sections normales de plus grande et de plus petite courbure. On en conclut que les lignes de courbure sont tangentes aux sections principales, et, par suite, qu'elles se coupent à angle droit ainsi que ces dernières.

Enfin, rappelons que si p, q, r, s, t ont été remplacés par leurs valeurs en x et y, tirées de l'équation

$$z = \mathrm{F}(x, y),$$

l'équation (1) deviendra une équation différentielle ordinaire à deux variables dont l'intégrale sera de la forme

$$c^2 + \varphi(x, y)\, c + \psi(x, y) = 0,$$

c désignant la constante arbitaire. Puis, la condition que cette intégrale soit vérifiée par les coordonnées du point assigné sur la surface, fournira deux valeurs de c; et ces valeurs étant reportées successivement dans l'intégrale, on aura les équations finies des projections des deux lignes de courbure qui passent par le point dont il s'agit.

Maintenant, de quel ordre est la plus courte distance des deux normales consécutives le long d'une ligne de courbure?

Le second terme du numérateur de δ

$$\frac{1}{1.2}\left(dq\, d^2\alpha + d\alpha\, d^2 q - dp\, d^2\beta - d\beta\, d^2 p\right)$$

est précisément la moitié de la différentielle du premier $(dq\, d\alpha - dp\, d\beta)$; et puisque celui-ci est constamment nul quand le point (x, y, z) décrit la ligne de courbure, l'autre est nul aussi le long de cette même ligne. Le numérateur de δ est donc un infiniment petit du quatrième ordre *au moins*; d'ailleurs le dénominateur est du premier. Donc δ sera du troisième ordre au moins.

Cette remarque intéressante, relative à l'ordre infinitésimal de la plus courte distance, a été faite pour la première fois par M. Bouquet [*], sur un *système de droites, qu'il assujettit à la condition d'être tangentes à une même courbe dans l'espace*. Cette condition de contact ne laisse subsister qu'*un seul paramètre arbitraire* dans les coefficients des équations de la série de droites considérées par M. Bouquet, et c'est aussi ce qui a lieu dans le cas qui nous occupe. Mais la démonstration précédente est fondée sur le développement en série des accroissements Δp, Δq, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, lequel n'exige pas que p, q, α, β soient fonctions d'une seule variable indépendante. Ainsi, la propriété remarquée par M. Bouquet s'appliquerait à toute série de droites

$$x = az + b, \quad y = cz + d,$$

[*] Tome XI de ce Journal, page 126.

où a, b, c, d seraient fonctions *continues* d'une ou de plusieurs variables indépendantes. S'il arrive que, pour deux quelconques de ces droites infiniment voisines, la distance δ soit infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, elle sera au moins du troisième ordre.

Quant au troisième terme du numérateur de δ,

$$\frac{1}{1.2.3}(dq\,d^3\alpha + d\alpha\,d^3q - dp\,d^3\beta - d\beta\,d^3p) + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta),$$

il n'est pas la différentielle du second, et, par conséquent, ne s'annule pas avec lui. Seulement il se réduit (eu égard à cette différentielle qui est nulle) à

$$-\frac{1}{12}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta),$$

et nous verrons plus bas, conformément à un second théorème également prouvé par M. Bouquet, que ce dernier terme ne saurait être nul pour tous les points de la ligne de courbure, qu'autant que toutes les normales le long de cette ligne seraient dans un même plan. Alors δ serait rigoureusement nulle.

Avant d'aller plus loin, il convient de démontrer que les normales à la surface, le long d'une ligne de courbure, sont tangentes à une même courbe dans l'espace.

Si l'on associe aux deux équations de la première normale, celles de la normale infiniment voisine, *réduites à ne plus contenir les infiniment petits d'ordre supérieur au premier*, je dis que le système de ces quatre équations :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= -pz' + \alpha,\\ y' &= -qz' + \beta,\\ x' &= -(p+dp)z' + \alpha + d\alpha,\\ y' &= -(q+dq)z' + \beta + d\beta, \end{aligned}\right.$$

sera vérifié par les coordonnées (x', y', z') d'un certain point de l'espace. En effet, les deux dernières se réduisent, en vertu des deux autres, à

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} z'\,dp &= d\alpha,\\ z'\,dq &= d\beta, \end{aligned}\right.$$

et, d'après la condition (1), elles s'accordent à donner la même valeur de z'.

Pour déterminer les coordonnées de ce point qui appartient évidemment à la première normale, on remplacera le système (2) par le suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= -pz' + \alpha,\\ y' &= -qz' + \beta,\\ [1+p^2 - r(z'-z)][1+q^2 - t(z'-z)] &= [(z'-z)s - pq]^2, \end{aligned}\right.$$

dont la troisième équation résulte de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (3). Quand le point (x, y, z) se déplacera sur la surface en suivant une ligne de courbure, le point (x', y', z') défini par les équations ci-dessus, se déplacera, en même temps, suivant une courbe parfaitement déterminée et dont on aurait les équations en éliminant x, y, z entre le système (4), l'équation de la surface

$$z = \mathrm{F}(x, y),$$

et l'intégrale

$$c^2 + \varphi(x, y)c + \psi(x, y) = 0.$$

Maintenant il est facile de voir que la tangente à cette courbe au point (x', y', z') n'est autre que la normale même au point (x, y, z) de la surface. En effet, si l'on différentie les deux premières équations (4) par rapport à x, en regardant z, y, x', y', z', comme fonction de cette variable indépendante, il vient

$$dx' = -p\,dz' - z'\,dp + d\alpha,$$
$$dy' = -q\,dz' - z'\,dq + d\beta,$$

lesquelles se réduisent, eu égard aux équations (3), à

$$(5) \qquad \frac{dx'}{dz'} = -p, \quad \frac{dy'}{dz'} = -q.$$

Donc la normale à la surface, qui déja passe par le point (x', y', z'), a ses coefficients angulaires égaux à ceux de la tangente à la courbe que décrit ce point, et, par suite, se confond avec cette tangente. Cette courbe est ainsi l'enveloppe des normales consécutives ou l'arête de rebroussement de la surface développable qu'elles forment.

Enfin, nous avons dit que si l'on supposait

$$(6) \qquad d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta = 0,$$

en même temps que la condition (1) a lieu, les normales consécutives seraient dans un même plan, et, par suite, δ rigoureusement nulle. En effet, cela revient à prouver que l'arête de rebroussement est alors plane. Or les équations (3) différentiées donnent

$$d^2\alpha = z'\,d^2p + dp\,dz',$$
$$d^2\beta = z'\,d^2q + dq\,dz',$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation (6), la réduisent à

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{d^2q}{dq}.$$

Intégrant, il vient

$$l(dp) = l(c\,dq) \quad \text{ou} \quad p = cq - c',$$

et, en vertu des équations (5),

$$dx' = c\,dy' + c'\,dz',$$

dont l'intégrale est

$$x' = cy' + c'z' + c'',$$

c, c', c'' étant des constantes arbitraires. C. Q. F. D.

Des ombilics.

Un ombilic est un point d'une surface où toutes les sections normales ont des rayons de courbure égaux et de même signe. Cette condition s'exprime, comme on sait, par les équations

$$(7) \qquad \frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t} = \frac{pq}{s},$$

auxquelles il faut joindre

$$z = F(x, y).$$

Pour ce point singulier, l'équation (1), ou sa transformée du second degré en $\frac{dy}{dx}$, devient identique. Il en résulte que, dans toutes les directions autour de l'ombilic, la plus courte distance δ, de la normale issue de ce point à la normale d'un point infiniment voisin, est infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Mais *il ne s'ensuit plus que δ soit du troisième ordre au moins*. Car l'*identité*

$$dq\,d\alpha - dp\,d\beta = 0,$$

n'a lieu ici que pour l'ombilic seulement, et non pour une suite continue de points. On n'est donc pas en droit d'égaler à zéro sa différentielle, pour en conclure que le terme du second ordre que renferme δ est nul.

Considérons, par exemple, le paraboloïde elliptique,

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

nous trouvons, abstraction faite d'un facteur constant,

$$dp\,d\beta - dq\,d\alpha = dx^2\left[Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 + B)\frac{dy}{dx} - xy\right],$$

en posant

$$A = \frac{a}{b}, \quad B = a(a-b).$$

Les équations qui déterminent les ombilics sont

$$(8) \qquad xy = 0, \quad x^2 - Ay^2 + B = 0.$$

Soit $a > b$; les seules solutions réelles sont

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{b(a-b)},$$

d'où

$$z = \frac{a-b}{2}.$$

Ces coordonnées déterminent deux ombilics situés sur la parabole principale de plus petit paramètre.

Si l'on prend maintenant la différentielle relative à x de $(dp\,d\beta - dq\,d\alpha)$, on trouve

$$(9)\qquad dx^3\left\{\left[2Axy\frac{dy}{dx}+(x^2-Ay^2+B)\right]\frac{d^2y}{dx^2}+\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\right\},$$

expression dont le terme affecté de $\frac{d^2y}{dx^2}$ disparaît pour les ombilics, en vertu des équations (8).

[Il est bon de remarquer que cette simplification n'est pas particulière au paraboloïde, et qu'elle aura évidemment lieu, en vertu des équations (7), pour un ombilic de toute autre surface. Cette remarque nous dispensera désormais de tenir compte des termes provenant de la différentiation de $\frac{dy}{dx}$. Toutefois ceci suppose que $\frac{dy}{dx}$ ne soit pas infini.]

Ainsi, dans le cas d'un ombilic, la différentielle ci-dessus se réduit, *pour toute valeur finie de* $\frac{dy}{dx}$, à la forme

$$(10)\qquad dx^3\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right).$$

Pour que δ fût du troisième ordre, il faudrait donc que l'on eût l'équation

$$(11)\qquad \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=0.$$

Mais le facteur $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$ est essentiellement positif, et la valeur $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, que l'on tire du second facteur, devient infinie pour les coordonnées

$$x=0,\quad y=\pm\sqrt{b(a-b)},$$

des ombilics.

L'équation (11) n'a donc pas de racines réelles et finies.

Donc δ n'est pas du troisième ordre, mais seulement du second, dans toutes les directions autour de l'ombilic.

Nous devons toutefois excepter la direction pour laquelle $\frac{dy}{dx}=\infty$; or c'est précisément celle de la parabole principale dont le plan est celui des (y, z). L'expression (9) se présente alors sous une forme illusoire $0\times\infty$; et, en effet, ce n'est pas à l'accroissement dx (qui est, dans ce cas, infiniment petit par rapport à dy) qu'il convient de rapporter l'ordre infinitésimal de δ; mais c'est dy qu'il convient alors de regarder comme l'accroissement indépendant, et de mettre en facteur dans les deux termes de δ. Ce changement de variable indépendante fournit pour la différentielle de $dp\,d\beta - dq\,d\alpha$, l'expression analogue à (10),

$$(12)\qquad dy^3\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+A\right]\left(x-y\frac{dx}{dy}\right),$$

et en y substituant les coordonnées des ombilics, elle devient

$$\pm dy^3 \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \mathrm{A} \right] \sqrt{b(a-b)}\, \frac{dx}{dy}.$$

On voit qu'elle s'annule, en effet, pour $\frac{dx}{dy} = 0$; et seulement pour cette direction qui répond bien au plan des (y, z) indiqué par la racine infinie de l'équation (11). Mais alors les deux normales infiniment voisines sont contenues dans le plan de cette section principale, et, par suite, leur plus courte distance est rigoureusement nulle. D'ailleurs, quel que soit l'accroissement fini Δy, tant qu'on ne quittera pas la section principale zoy, on aura visiblement

$$\Delta p = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \alpha = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Delta q\, \Delta \alpha - \Delta p\, \Delta \beta = 0, \quad \text{ou} \quad \delta = 0.$$

En résumé, quelque direction que l'on suive sur le paraboloïde elliptique à partir de l'un des ombilics, δ n'est jamais du troisième ordre, mais toujours du second, excepté suivant la direction de la parabole principale qui contient l'ombilic et pour laquelle δ est rigoureusement nulle. En sorte que par l'ombilic il ne passe pas de ligne continue ayant la propriété des lignes de courbure ordinaires, c'est-à-dire telle que δ soit infiniment petite du troisième ordre.

Si le paraboloïde était de révolution, on aurait

$$a = b,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0,$$

sommet du paraboloïde.

La différentielle (10) devient alors identiquement nulle; mais il en est de même du terme du troisième ordre, ainsi que des suivants. Car dans toutes les directions autour du sommet, toute normale à la surface est contenue dans un plan méridien qui passe par la normale au sommet, et δ est rigoureusement nulle.

Considérons encore l'ellipsoïde à trois axes inégaux,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On trouve, abstraction faite d'un facteur constant,

$$dp\, d\beta - dq\, d\alpha = dx^2 \left[\mathrm{A}\, xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - \mathrm{A} y^2 - \mathrm{B}) \frac{dy}{dx} - xy \right],$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)}, \quad \mathrm{B} = \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Les équations propres aux ombilics sont

$$xy = 0, \quad x^2 - Ay^2 - B = 0.$$

Soit $a > b > c$; les seules solutions réelles sont

$$y = 0, \quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

d'où

$$z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Elles déterminent quatre ombilics symétriquement placés dans le plan de la section principale qui contient le plus grand et le plus petit axe.

Prenons maintenant la différentielle de $(dp\,d\beta - dq\,d\alpha)$; il suffira évidemment de changer B en — B dans les résultats obtenus pour le paraboloïde. L'équation (10) et l'équation (11) garderont la même forme. Seulement la constante A, au lieu de désigner $\frac{a}{b}$, représentera $\frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2}$. Ce sera toujours une quantité positive, et, par suite, il n'y aura encore de valeur réelle pour $\frac{dy}{dx}$ que celle tirée du facteur $x\frac{dy}{dx} - y$, égalé à zéro.

Ainsi l'équation (11) n'admet qu'une seule racine réelle et cette racine est nulle. D'ailleurs il n'y a point ici de racines infinies. La valeur $\frac{dy}{dx} = 0$ indique une direction comprise dans le plan zox, c'est-à-dire tangente à l'ellipse principale qui contient les ombilics. Mais, comme les normales à la surface menées par les différents points de cette section sont toutes comprises dans son plan, δ est encore rigoureusement nulle.

Si l'ellipsoïde était de révolution, autour de son petit axe, on aurait

$$a = b, \quad A = 1, \quad B = 0,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm c;$$

ce sont les deux pôles de l'ellipsoïde aplati. La différentielle (10) devient identiquement nulle, et $\frac{dy}{dx}$ reste indéterminé. Mais alors δ est encore rigoureusement nulle, puisque les normales sont comprises dans un même plan méridien.

Si l'ellipsoïde était de révolution autour de son grand axe, on aurait

$$b = c, \quad A = 0, \quad B = a^2,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = \pm a, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

ce sont les deux pôles de l'ellipsoïde allongé. L'équation (11) se réduit, en n'ayant égard d'abord qu'aux valeurs finies de $\frac{dy}{dx}$, à $\frac{dy}{dx} = 0$. Cette racine indique le plan méridien zox.

De plus, comme l'équation (11) est tombée du troisième degré au premier par l'évanouissement du coefficient A, on peut la regarder comme admettant deux racines infinies. Ces racines sont, d'ailleurs, mises en évidence en partant de la différentielle (12), où l'on a pris dy pour accroissement arbitraire, et qui donne, dans ce cas particulier,

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$$

La solution $\frac{dy}{dx} = \infty$ correspond ici à une section méridienne *quelconque,* puisque la tangente menée par l'ombilic à cette section, étant comprise dans un plan tangent perpendiculaire à l'axe de révolution, ne peut manquer de se projeter sur le plan des (x, y) suivant une perpendiculaire à cet axe.

Dans les deux cas, que $\frac{dy}{dx}$ soit nul ou infini, la plus courte distance δ est toujours nulle, puisque les normales que l'on compare sont dans un même plan.

On est donc en droit de conclure pour les ombilics de l'ellipsoïde, comme pour ceux du paraboloïde elliptique, que la plus courte *distance δ est du second ordre ou nulle, jamais du troisième ordre;* en sorte qu'il ne passe pas par ces points singuliers de lignes telles, que δ soit de l'ordre infinitésimal qui appartient aux lignes de courbure ordinaires.

Pour passer de l'ellipsoïde à l'hyperboloïde à deux nappes, on changera b^2 en $-b$, et c^2 en $-c^2$ dans les formules précédentes. Les conclusions resteront évidemment les mêmes quant à l'ordre infinitésimal de δ.

Quant aux deux autres surfaces du second ordre, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique, il ne peut être question d'ombilics, puisque dans ces deux surfaces, il y a autour de chaque point quatre régions, séparées par les deux génératrices rectilignes, dans lesquelles les sections normales ont des courbures opposées.

En général, quel que soit le degré de la surface, le terme

$$dp\, d\beta - dq\, d\alpha$$

est de la forme

$$(13) \qquad \mathrm{M}\, dy^2 + \mathrm{N}\, dy\, dx + \mathrm{P}\, dx^2,$$

M, N, P étant des fonctions de x et de y, dont nous avons donné l'expression dans la transformée de l'équation (1), et qui sont identiquement nulles pour un ombilic. Dans toutes les directions autour de ce point, δ est au moins du second ordre infinitésimal. Mais si l'on demande une direction telle, que δ soit au moins de troisième ordre, on aura, pour déterminer la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx}$, l'équation du troisième degré

$$(14)\qquad \frac{d\text{M}}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d\text{M}}{dx} + \frac{d\text{N}}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\text{N}}{dx} + \frac{d\text{P}}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{d\text{P}}{dx} = 0,$$

qui résulte de la différentiation de l'expression ci-dessus par rapport à x.

Quand $\frac{d\text{M}}{dy}$ ne s'évanouira pas pour l'ombilic dont il s'agit, cette équation fera connaître au moins une et au plus trois directions suivant lesquelles δ sera d'un ordre supérieur au second; mais, dans toutes les autres directions, δ ne sera que du second ordre, en sorte que le rapprochement des normales sera *moins* intime que suivant une ligne de courbure passant par un point quelconque de la surface. De plus, il ne faut pas perdre de vue que δ n'est du troisième ordre que pour *les normales qui correspondent à une ou trois directions d'éléments infiniment petits partant de l'ombilic*, et non *pour une suite continue de normales*. Il ne faut donc pas dire qu'il passera par l'ombilic trois *lignes* de courbure, dans le sens ordinairement attaché au mot ligne.

Quand $\frac{d\text{M}}{dy}$ sera réduit à zéro par les coordonnées de l'ombilic, l'équation (14) aura une racine infinie, qui indiquera une direction perpendiculaire à l'axe des x. Les deux autres racines, étant fournies par une équation du second degré, pourront être imaginaires. Dans ce cas, qui s'est présenté pour le paraboloïde elliptique, il n'y aura pas de direction oblique à l'axe des x, suivant laquelle δ soit d'un ordre supérieur au second. Quant à la racine infinie, pour apprécier l'ordre de grandeur correspondant de δ, il convient de mettre dy^2 en facteur dans l'expression (13), et de prendre pour inconnue $\frac{dx}{dy}$. Or, en égalant à zéro la différentielle de

$$\text{P}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \text{N}\frac{dx}{dy} + \text{M},$$

il est visible qu'on trouvera

$$\frac{dx}{dy} = 0.$$

Ainsi la discussion de ce cas revient, au fond, à celle du cas où l'équation (14) aurait une racine nulle.

Enfin, s'il arrivait que tous les coefficients de l'équation (14) fussent identiquement nuls pour l'ombilic, δ serait au moins du troisième ordre infinitésimal dans toutes les directions autour de ce point, et l'on pourrait se proposer de chercher dans quelle direction δ s'élèverait au quatrième ordre. Pour cela, il faudrait égaler à zéro le troisième terme du numérateur de δ, savoir

$$\frac{1}{6}(dq\,d^3\alpha + d\alpha\,d^3q - dp\,d^3\beta - d\beta\,d^3p) + \frac{1}{4}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta)$$

nous avons dit que ce terme n'est pas la différentielle du second. Mais si l'on désigne celui-ci par H, en sorte que

$$H = dq\,d^2\alpha + d\alpha\,d^2 q - dp\,d^2\beta - d\beta\,d^2 p,$$

le premier membre de l'équation (14) ne sera autre chose que $\frac{H}{dx}$, et le troisième terme du numérateur de δ prendra la forme

$$\frac{1}{6}\,dH - \frac{1}{12}(d^2 q\,d^2\alpha - d^2 p\,d^2\beta).$$

En développant ces différentielles, mettant dx^4 en facteur, puis égalant à zéro, on obtiendrait une équation du quatrième degré en $\frac{dy}{dx}$. Il y aurait donc au plus quatre directions à partir de l'ombilic suivant lesquelles δ serait du quatrième ordre infinitésimal. Et ainsi de suite.

Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes;

Par M. J. LIOUVILLE.

Voici la composition de cette intégrale définie. Posons

$$P = (1 + ax_1)(1 + ax_1 + ax_2)\ldots(1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1})$$

et

$$Q = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}),$$

a désignant une constante, et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des variables en nombre $(n-1)$. Soit de plus

$$p = \frac{1-\mu}{n}, \quad q = \frac{\mu}{n} - 1,$$

μ étant une constante positive, ou du moins à partie réelle positive. Cela posé, l'intégrale dont je veux parler, et que je représenterai par U, est

$$U = \int\int\cdots\int P^p Q^q \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1};$$

l'intégration s'étend à tous les systèmes de valeurs *positives* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour lesquels on a

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1:$$

on pourra donc intégrer d'abord par rapport à x_{n-1} entre les limites

$$x_{n-1} = 0, \quad x_{n-1} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2},$$

puis par rapport à x_{n-2}, entre les limites

$$x_{n-2} = 0, \quad x_{n-2} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-3},$$

et ainsi de suite, la dernière intégrale relative à x_1 étant prise de $x_1 = 0$ à $x_1 = 1$.

J'ai obtenu pour l'intégrale U la valeur suivante, où Γ désigne à l'ordinaire l'intégrale eulérienne de seconde espèce,

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu-1}.$$

En posant $a = 0$, on a $P = 1$; et l'équation

$$\int\int \ldots \int Q^q \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n,$$

à laquelle on arrive alors, n'est qu'un cas très-particulier d'un résultat bien connu.

On aurait une seconde vérification facile et du même genre en supposant $\mu = 1$; mais cette fois encore a disparaîtrait.

Il restera si l'on prend $\mu = n$. On doit avoir alors

$$\int\int \ldots \int P^{\frac{1-n}{n}} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\sqrt[n]{1+a} - 1}{a}\right)^{n-1};$$

or on peut aisément s'assurer qu'il en est ainsi en effectuant les intégrations qui sont ici très-faciles.

Si l'on pose $n = 2$, U n'est plus qu'une intégrale simple. Notre formule donne pour ce cas :

$$\int_0^1 (1 + ax_1)^{\frac{1-\mu}{2}} [x_1(1 - x_1)]^{\frac{\mu}{2} - 1} dx_1 = \frac{2^{\mu - 1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu - 1}.$$

Pour $n = 3$, l'intégrale U est double : notre formule devient

$$\int_0^1 x_1^{\frac{\mu}{3} - 1} (1 + ax_1)^{\frac{1-\mu}{3}} dx_1 \int_0^{1-x_1} (1 + ax_1 + ax_2)^{\frac{1-\mu}{3}} [x_2(1 - x_1 - x_2)]^{\frac{\mu}{3} - 1} dx_2$$
$$= \frac{3^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)^3 \left(\frac{\sqrt[3]{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu - 1}.$$

Et ainsi de suite.

La formule pour U n'est pas la seule de cette espèce que l'on puisse trouver. L'emploi des différentielles à indices quelconques m'en a fait rencontrer beaucoup d'autres : les équations qu'on obtient d'abord contiennent même une fonction arbitraire. Mais la place me manque pour les écrire : je crois utile, d'ailleurs, de fixer un moment l'attention sur la formule particulière ci-dessus, qui me semble importante.

L'intégrale simple qui répond au cas de $n = 2$ est une intégrale trinôme. En m'occupant de ce genre d'intégrales, je suis arrivé à des résultats intéressants qui feront le sujet d'un autre article.

Rapport sur un Mémoire de M. Bour, *concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique;*

Par M. J. LIOUVILLE.

(*Comptes rendus*, tome XL, page 661. — Séance du 26 mars 1855.)

L'Académie nous a chargés, M. Lamé, M. Chasles et moi, de lui faire un Rapport sur un Mémoire de M. Edmond Bour, élève ingénieur des Mines, concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique. On sait qu'avec deux intégrales quelconques (α), (β) de ces équations, Poisson a formé [*] une combinaison (α, β) dont il a prouvé que la valeur est indépendante du temps, de sorte que, si la quantité (α, β) ne se réduit identiquement ni à zéro ni à une constante, on a, en l'égalant à une constante arbitraire, une intégrale des équations différentielles proposées. Le théorème de Poisson fournit donc, comme l'a observé Jacobi (*Comptes rendus*, tome IX, ou *Journal de Mathématiques*, tome V, année 1840), une méthode d'intégration singulière qui pourra quelquefois faire connaître successivement toutes les intégrales au moyen de deux d'entre elles données d'abord. Mais il peut arriver aussi qu'on ne trouve par là qu'un nombre très-limité d'intégrales distinctes. Il se peut même qu'on n'en ajoute aucune aux deux (α), (β) dont on part. Il en sera, par exemple, toujours ainsi quand l'une d'elles est celle des forces vives et que l'autre ne contient pas le temps; car alors on a identiquement $(\alpha, \beta) = 0$.

Mais Jacobi nous avertit et M. Bour prouve, dans son Mémoire, que, dans les cas où la méthode d'intégration indiquée plus haut échoue, il y a souvent un autre parti à tirer des intégrales connues, pour achever ou du moins pour pousser plus loin l'intégration. Déjà l'un de nous l'avait montré dans les Cours du Collége de France en 1853 et dans une Note présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin de la même année, mais pour le seul cas où l'on possède

[*] *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, lu à l'Institut le 16 octobre 1809. (*Journal de l'École Polytechnique*, XV^{e} cahier.)

la moitié des intégrales. C'est en effet par des équations comme $(\alpha, \beta) = 0$, que l'on exprime les conditions d'intégrabilité exigées par Poisson (*Journal de Mathématiques*, tome II, année 1837) pour la détermination d'une fonction qui, de suite, fournit alors les intégrales restantes [*]. M. Bour pénètre plus profondément dans le cœur de la question, et il examine en général l'abaissement successif qui résulte de la connaissance de chaque intégrale nouvelle. Il nous serait difficile d'exposer en langage ordinaire les détails de son analyse. Contentons-nous de dire qu'il opère sur l'équation linéaire aux différences partielles du premier ordre que toute intégrale doit vérifier. C'est sur cette équation qu'il effectue un abaissement de deux unités dans le nombre des variables, à mesure qu'une nouvelle intégrale convenable lui est fournie. M. Bour montre de plus qu'un abaissement égal ou même supérieur peut quelquefois être obtenu au moyen d'intégrales qui semblaient d'abord étrangères à sa méthode.

M. Bour s'est restreint au cas où les forces et les liaisons sont indépendantes du temps et où l'intégrale des forces vives a lieu, de sorte que, dans les équations

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dH}{dp_1}, \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = \frac{dH}{dq_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = -\frac{dH}{dp_n},$$

dont il s'est servi, la fonction H ne contient pas t; mais nous nous sommes assurés que son analyse, légèrement modifiée, s'étend au cas général où H est une fonction quelconque de t et des autres variables.

Les géomètres liront avec intérêt le Mémoire de M. Edmond Bour. C'est dans les excellentes leçons de M. Bertrand sur la mécanique que M. Bour a surtout puisé les idées premières de son travail. L'élève s'est montré digne du maître.

Nous proposons à l'Académie d'approuver le Mémoire de M. Bour et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*.

[*] M. Adrien Lafon a inséré mon théorème (en me citant et en le démontrant à sa manière) dans une Thèse remarquable pour le doctorat ès-sciences, imprimée l'an dernier. Je le retrouve encore dans un Mémoire de M. Donkin, qui vient de paraître dans les *Transactions Philosophiques* de la Société royale de Londres; mais le Mémoire de M. Donkin n'est daté que du 23 février 1854. L'estimable auteur ne paraît du reste avoir eu aucune connaissance des résultats que j'avais obtenus avant lui.

(*Note de M. Liouville.*)

NOTE

Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans le Rapport qui précède, sur le Mémoire de M. Edmond Bour, j'ai parlé d'un théorème que j'ai donné il y a deux ans dans mon cours au Collége de France, puis communiqué au Bureau des Longitudes. L'extrait suivant du procès-verbal de la séance du 29 juin 1853, que je dois à l'obligeance du Secrétaire du Bureau, M. Daussy, contient textuellement la Note que j'ai présentée à ce corps savant.

BUREAU DES LONGITUDES.

Paris, le 28 mars 1855.

Le Secrétaire du Bureau des Longitudes certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du Bureau du mercredi 29 juin 1853.

« M. Liouville communique la Note ci-jointe sur l'integration des equations de la
» Dynamique. Il y ajoute verbalement tous les développements nécessaires pour en
» expliquer l'utilité et les applications.

Note sur les équations de la Dynamique;
par **M. J. LIOUVILLE.**

(Communiquée au Bureau des Longitudes, le mercredi 29 juin 1853.)

» Considérons les équations de la Dynamique, ou plutôt le système plus general
» d'équations différentielles que voici :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy'}, \ldots, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dz'},$$

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dV}{dy}, \ldots, \qquad \frac{dz'}{dt} = -\frac{dV}{dz};$$

V étant une fonction donnée quelconque de t, x, y, ..., x', y', ...; admettons qu'on ait trouvé la moitié des intégrales de ce système

$$\alpha = \varphi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$
$$\beta = \psi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma = \varpi(t, x, y, \ldots, x', y', \ldots),$$

et supposons que toutes les quantités (β, α), (γ, β), ..., (α, γ), .., où nous prenons

$$(\alpha, \beta) = \frac{d\alpha}{dx'}\cdot\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dx'} + \frac{d\alpha}{dy'}\cdot\frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{d\beta}{dy'} + \ldots$$
$$+ \frac{d\alpha}{dz'}\cdot\frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz}\cdot\frac{d\beta}{dz'},$$

» soient égales à zéro. Je dis que si, cela étant, les équations intégrales trouvées peuvent fournir les valeurs de x', y', ..., z', en t, x, y, ..., z, la quantité

$$x'dx + y'dy + \ldots + z'dz - \mathrm{V}\,dt$$

» sera une différentielle exacte par rapport à x, y, ..., z, t. Soit $d\mathrm{S}$ cette différentielle; S contiendra les constantes α, β, ..., γ; et le système complet des intégrales de nos équations différentielles sera

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = x', \qquad \frac{d\mathrm{S}}{dy} = y', \ldots, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{dz} = z',$$
$$\frac{d\mathrm{S}}{d\alpha} = -\alpha', \qquad \frac{d\mathrm{S}}{d\beta} = -\beta', \ldots, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{d\gamma} = -\gamma',$$

» α', β', ..., γ', étant de nouvelles constantes arbitraires.

» Il n'y aura à cet énoncé qu'un très-léger changement à faire si les intégrales données $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, ..., $\gamma = \varpi$, au lieu de fournir x', y', ..., z', fournissaient les valeurs d'une moitié quelconque des quantités x, y, .., z, x', y', ..., z', en fonction de t et des autres, pourvu que dans cette moitié il n'y ait que des lettres de nom différent comme x', y', ..., z. J'ai donné de longs développements sur toutes ces questions dans mes leçons au Collége de France.

» Le 29 juin 1853.

» *Signé* J. Liouville. »

P. Daussy.

Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces;

Par M. WOEPCKE.

I.

Soient

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \text{et} \quad C_1, C_2, \ldots, C_n$$

deux séries de fonctions de p variables et de degré m; posons

$$A_1 = B_1 + \lambda_1 C_1, \quad A_2 = B_2 + \lambda_2 C_2, \ldots, \quad A_{n-1} = B_{n-1} + \lambda_{n-1} C_{n-1}, \quad A_n = B_n + \lambda_n C_n,$$

$$\Sigma_{1,2} = \lambda_1 B_2 C_1 - \lambda_2 B_1 C_2, \ldots, \quad \Sigma_{1,n-1} = \lambda_1 B_{n-1} C_1 - \lambda_{n-1} B_1 C_{n-1}, \quad \Sigma_{1,n} = \lambda_1 B_n C_1 - \lambda_n B_1 C_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma_{n-2,n-1} = \lambda_{n-2} B_{n-1} C_{n-2} - \lambda_{n-1} B_{n-2} C_{n-1}, \quad \Sigma_{n-2,n} = \lambda_{n-2} B_n C_{n-2} - \lambda_n B_{n-2} C_n,$$

$$\Sigma_{n-1,n} = \lambda_{n-1} B_n C_{n-1} - \lambda_n B_{n-1} C_n;$$

et désignons par $\nu(M = 0, N = 0)$ la totalité des systèmes de valeurs des variables satisfaisant simultanément à deux équations $M = 0$ et $N = 0$. Il est évident

1°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0)$$

satisfait aussi à $A_\alpha = 0$;

2°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, B_\beta = 0), \ \nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0), \ \nu(C_\beta = 0, B_\beta = 0),$$
$$\nu(C_\beta = 0, C_\alpha = 0), \ \nu(A_\alpha = 0, A_\beta = 0),$$
$$\nu\left(A'_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{\lambda_\beta} C_\alpha = 0, \ A'_\beta = B_\beta + \frac{1}{\lambda_\alpha} C_\beta = 0\right),$$

ainsi que tous les $\nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$, satisfont simultanément à une seule et même équation du $(2m)^{ième}$ degré

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = 0.$$

Si les $B = 0$ et $C = 0$ sont des équations de surfaces ou de courbes de degré m, on obtient que la surface ou courbe du $(2m)^{ième}$ degré $\Sigma_{\alpha,\beta}$ passe à la fois par les intersections de B_α avec B_β, de B_α avec C_α, de C_β avec B_β, de C_β avec C_α, de A_α avec A_β, de A'_α avec A'_β, qui sont des surfaces ou courbes du $m^{ième}$ degré, et, en outre, par les intersections de tous les couples de surfaces ou courbes du $(2m)^{ième}$ degré $\Sigma_{\rho,\alpha} = 0$ et $\Sigma_{\rho,\beta} = 0$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$.

Ainsi, lorsque les $B = 0$ et $C = 0$ représentent des courbes de degré m, on trouve que les $(4n-2)m^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les six couples de courbes du $m^{ième}$ degré et les $n-2$ couples de courbes du $(2m)^{ième}$ degré, sont tous sur une seule et même courbe du $(2m)^{ième}$ degré.

Si l'on remplace chacune des fonctions B par une seule et même fonction U, on obtient les théorèmes précédemment énoncés. (*Voir* le cahier de décembre 1854 du présent Journal, page 407.)

II.

Soient

$$\begin{array}{l} B_1, \; B_2, \ldots, \; B_n, \\ C_1, \; C_2, \ldots, \; C_n, \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_1, \; R_2, \ldots, \; R_n, \end{array}$$

q séries de fonctions de p variables et de degré m, q étant un nombre pair.

Formons les fonctions de degré qm

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha . D_\beta . E_\alpha \ldots Q_\beta . R_\alpha - \lambda_\beta . B_\alpha . C_\beta . D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta,$$

en donnant à α et β, successivement et indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et en excluant les combinaisons $\alpha = \beta$.

La fonction $\Sigma_{\alpha,\beta}$ est la différence de deux produits que nous désignerons un instant par $\lambda_\alpha . \pi_{\alpha,\beta}$ et $\lambda_\beta . \pi_{\beta,\alpha}$. Divisons le produit $\pi_{\alpha,\beta}$ d'une façon quelconque en deux produits $\varphi_{\alpha,\beta}$ et $\psi_{\alpha,\beta}$, de telle sorte que

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . \varphi_{\alpha,\beta} . \psi_{\alpha,\beta} - \lambda_\beta . \varphi_{\beta,\alpha} . \psi_{\beta,\alpha},$$

et formons les fonctions

$$\sigma_{\alpha,\beta} = \lambda_\alpha . \varphi_{\alpha,\beta} - \psi_{\beta,\alpha}, \quad \sigma_{\beta,\alpha} = \lambda_\beta . \varphi_{\beta,\alpha} - \psi_{\alpha,\beta}.$$

Nous obtiendrons ainsi : q fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $(q-1)m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta - C_\beta . D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta, \text{ etc.};$$

$\frac{q(q-1)}{1.2}$ fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $(q-2)m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha - D_\alpha . E_\beta \ldots Q_\alpha . R_\beta, \text{ etc.},$$

et ainsi de suite; enfin, $\dfrac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}$ fonctions $\sigma_{\alpha,\beta}$ de degré $\frac{q}{2}m$, telles que

$$\lambda_\alpha . B_\beta . C_\alpha . D_\beta \ldots J_\alpha - K_\alpha . L_\beta M_\alpha \ldots R_\beta, \text{ etc.}$$

Il est évident que :

1°. $\nu(B_\beta = 0, B_\alpha = 0)$, $\nu(B_\beta = 0, C_\beta = 0), \ldots$, $\nu(B_\beta = 0, R_\beta = 0)$,

$\nu(C_\alpha = 0, B_\alpha = 0)$, $\nu(C_\alpha = 0, C_\beta = 0), \ldots$, $\nu(C_\alpha = 0, R_\beta = 0)$,

. . . .

$\nu(R_\alpha = 0, B_\alpha = 0)$, $\nu(R_\alpha = 0, C_\beta = 0), \ldots$, $\nu(R_\alpha = 0, R_\beta = 0)$;

2°. Tous les $\qquad \nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \quad \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$

que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \ldots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$;

3°. Tous les $\qquad \nu(\sigma_{\alpha,\beta} = 0, \quad \sigma_{\beta,\alpha} = 0)$, satisfont simultanément à une seule et même équation du $(qm)^{ième}$ degré

$$\Sigma_{\alpha,\beta} = 0.$$

Donc, pour parler seulement de courbes, on voit que les $(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(B_\beta = 0, B_\alpha = 0)$, etc., les $(n-2)(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0,\ \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$, et les

$$\left[q(q-1)^2 + \frac{q(q-1)}{1.2}(q-2)^2 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots\left(\frac{q}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{q}{2}}\left(\frac{q}{2}\right)^2\right]m^2$$

points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons

$$(\sigma_{\alpha,\beta} = 0, \quad \sigma_{\beta,\alpha} = 0),$$

sont tous sur une seule et même courbe du $(qm)^{ième}$ degré.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

On sait que pour trouver l'intégrale en série de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

telle que la fournit le théorème de Taylor, il faut exécuter sur $f(x, y)$ ou f les opérations successives que voici :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f = f_1(x, y), \quad \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f = f_2(x, y), \quad \text{etc.};$$

après quoi l'on a

$$y = b + \frac{x-a}{1} f(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_1(a, b) + \ldots,$$

b étant la valeur arbitraire de y pour $x = a$.

Il est bon, je crois, d'ajouter que la considération de la fonction

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f$$

peut être quelquefois utile à un autre point de vue. En effet, si f renferme une constante indéterminée α qui disparaisse dans f_1, ou plus généralement qui disparaisse dans $\varphi(f) f_1$, $\varphi(f)$ désignant une fonction connue quelconque de f, je dis que la formule

$$\varphi(f) \frac{df}{d\alpha} (dy - f dx)$$

remplira la condition d'intégrabilité relativement aux deux variables x et y, en sorte que l'intégrale sous forme finie de l'équation (A) sera

$$\int \varphi(f) \frac{df}{d\alpha} (dy - f dx) = \text{constante}.$$

La démonstration est très-simple. Puisque $\varphi(f)f_1$ ne contient plus α, on a

$$\frac{d.\varphi(f)f_1}{d\alpha} = 0.$$

Développez la différentiation indiquée, après avoir remplacé f_1 par sa valeur

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f;$$

et vous verrez que l'équation qu'on vient de poser peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right) + \frac{d}{dy}\left(f\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right) = 0;$$

elle exprime donc précisément que

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - f\,dx)$$

est une différentielle exacte, comme nous l'avions avancé.

Observons, en terminant, que si l'équation

$$\frac{d.\varphi(f)f_1}{d\alpha} = 0,$$

sans avoir lieu en général, se trouvait vérifiée pour une certaine valeur particulière de la constante α, le produit

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - f\,dx)$$

serait de même une différentielle exacte, pour cette valeur particulière; circonstance dont on pourra tirer parti, pourvu que $\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}$ ne se réduise ni à 0, ni à ∞, ce qui peut arriver ici, mais non dans le cas général traité d'abord.

ÉTUDE SUR LA COURBURE DES SURFACES;

Par M. de la GOURNERIE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Polytechnique
et au Conservatoire des Arts et Métiers.

Nous nous proposons d'étudier la courbure des surfaces d'une manière plus intime que lorsqu'on se borne à considérer les rayons des cercles osculateurs des sections. Nous présenterons d'abord quelques considérations sur les sections planes des surfaces.

I.

1. Par un point pris arbitrairement sur une surface, faisons passer un plan vertical; nous aurons, en considérant la section,

$$dx = d\eta \cos\alpha, \quad dy = d\eta \sin\alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{dz}{d\eta} = \cos\alpha\,(q \operatorname{tang}\alpha + p),$$

η étant l'abscisse mesurée sur la trace horizontale du plan sécant, α l'angle de ce plan avec l'axe des abscisses, et x, y, z, p, q,... ayant leur signification ordinaire.

Par des différentiations successives, on obtient

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} = \cos^2\alpha\,(t \operatorname{tang}^2\alpha + 2s \operatorname{tang}\alpha + r),$$

$$\frac{d^3 z}{d\eta^3} = \cos^3\alpha\,(v \operatorname{tang}^3\alpha + 3w \operatorname{tang}^2\alpha + 3u \operatorname{tang}\alpha + u),$$

et, généralement,

$$\frac{d^n z}{d\eta^n} = \cos\alpha \left(\frac{d\,\dfrac{d^{n-1} z}{d\eta^{n-1}}}{dy} \operatorname{tang}\alpha + \frac{d\,\dfrac{d^{n-1} z}{d\eta^{n-1}}}{dx} \right).$$

Nous représenterons les seconds membres de ces équations par Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n.

2. Si une surface est telle, qu'en chacun de ses points une même valeur de $\tang\alpha$ anéantisse simultanément deux dérivées consécutives Z_n et Z_{n+1}, cette valeur anéantira toutes les dérivées d'un ordre plus élevé.

Pour prouver ce théorème, considérons les équations

$$(1) \qquad Z_n = 0, \qquad \frac{dZ_n}{dy}\tang\alpha + \frac{dZ_n}{dx} = 0,$$

qui, par hypothèse, doivent subsister pour tout point de la surface. Nous pouvons les différentier par rapport à chacune des variables x et y; prenant leurs dérivées par rapport à x, et éliminant entre elles $\frac{d\tang\alpha}{dx}$, on a

$$\frac{dZ_n}{dx}\left(\frac{d^2Z_n}{dy\,d\tang\alpha}\tang\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx\,d\tang\alpha} + 2\frac{dZ_n}{dy}\right) = \frac{dZ_n}{d\tang\alpha}\left(\frac{d^2Z_n}{dxdy}\tang\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx^2}\right).$$

On obtient de la même manière, en différentiant par rapport à y et éliminant $\frac{d\tang\alpha}{dy}$,

$$\frac{dZ_n}{dy}\left(\frac{d^2Z_n}{dy\,d\tang\alpha}\tang\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx\,d\tang\alpha} + 2\frac{dZ_n}{dy}\right) = \frac{dZ_n}{d\tang\alpha}\left(\frac{d^2Z_n}{dy^2}\tang\alpha + \frac{d^2Z_n}{dxdy}\right).$$

Divisons ces équations l'une par l'autre; le rapport des premiers membres sera $-\tang\alpha$ en vertu de la seconde équation (1), et nous aurons

$$\frac{d^2Z_n}{dy^2}\tang^2\alpha + 2\frac{d^2Z_n}{dxdy}\tang\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad Z_{n+2} = 0,$$

Z_{n+3} et toutes les dérivées d'un ordre plus élevé seront évidemment nulles comme Z_{n+2}.

Si une surface est telle, que pour chacun de ses points une dérivée Z_n ait une racine double, cette valeur de $\tang\alpha$ sera une racine de $\frac{dZ_n}{dx}$, et, par suite, de Z_{n+1}; elle anéantira ainsi deux dérivées consécutives, et, d'après ce que nous venons de voir, toutes les dérivées suivantes.

3. Si les deux premières dérivées Z_1 et Z_2 sont nulles en même

temps, toutes le seront, et une droite horizontale passera par chacun des points de la surface; et en effet, si l'on élimine $\tang \alpha$ entre ces deux dérivées égalées à zéro, on trouve l'équation commune des surfaces engendrées par une droite toujours horizontale.

Supposons maintenant que la seconde dérivée et la troisième soient nulles simultanément,

$$(2) \qquad t \tang^2 \alpha + 2s \tang \alpha + r = 0,$$

$$(3) \qquad v \tang^3 \alpha + 3w \tang^2 \alpha + 3m \tang \alpha + n = 0.$$

Monge a montré que dans ce cas la surface était réglée. Une petite discussion paraît ici nécessaire.

Si une seule des deux racines de l'équation (2) satisfait à (3), par tout point on pourra faire une section rectiligne, et la surface sera gauche.

Si les deux racines de l'équation (2) sont égales, cette valeur de $\tang \alpha$ satisfera à l'équation (3), et la surface sera réglée, et même développable, car il serait facile de reconnaître que le plan tangent ne change pas quand on déplace le point de contact sans faire varier α.

Dans le cas où les deux racines de l'équation (2) satisfont l'une et l'autre à l'équation (3), si ces racines sont réelles, la surface est doublement réglée: si elles deviennent imaginaires, la surface n'admet plus de sections rectilignes, mais elle est toujours du second degré, car le changement ne peut provenir que d'une modification dans les grandeurs relatives des coefficients numériques de son équation. Si les racines communes sont égales, la surface toujours du second degré devient développable.

D'après cela, en exprimant que l'équation (3) est exactement divisible par l'équation (2), on obtiendra une équation aux différences partielles qui représentera les surfaces du second ordre

$$(ut^2 - 3wrt + 2vrs)^2 + (vr^2 - 3utr + 2uts)^2 = 0.$$

Nous pourrions déduire d'autres conséquences du théoreme de l'article **2**, mais celles que nous venons d'indiquer suffisent dans cette étude, où nous ne considérerons pas les dérivées au delà du troisieme ordre.

II.

4. Soient α, β et γ les angles que forme avec les axes une tangente à la surface au point considéré, et R le rayon de courbure de la section normale qui contient cette tangente. On a, d'après une formule connue,

$$(4)\qquad R^2 = \frac{p^2+q^2+1}{Z_2^2},$$

en posant

$$Z_2 = t\cos^2\beta + 2s\cos\beta\cos\alpha + r\cos^2\alpha.$$

La différentiation donne

$$(5)\quad R\,dR = -(p^2+q^2+1)\frac{dZ_2}{Z_2^3} + \frac{(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha}{Z_2^2}\,dS,$$

en faisant

$$Z_3 = v\cos^3\beta + 3w\cos^2\beta\cos\alpha + 3u\cos\beta\cos^2\alpha + u\cos^3\alpha,$$

dS est la différentielle de l'arc, égale à $\dfrac{dx}{\cos\alpha}$ et à $\dfrac{dy}{\cos\beta}$.

Les polynômes représentés par Z_2 et Z_3 ne sont pas les mêmes que dans la première partie de cette étude, mais en les divisant respectivement par $\cos^2\alpha$ et $\cos^3\alpha$, ils se trouvent composés en $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ comme les premiers en $\tang\alpha$.

Différentiant la valeur de Z_2, on trouve

$$(6)\ dZ_2 = Z_3\,dS + 2(s\cos\beta + r\cos\alpha)\,d\cos\alpha + 2(t\cos\beta + s\cos\alpha)\,d\cos\beta;$$

il faut déterminer $d\cos\alpha$ et $d\cos\beta$.

Le plan sécant contient la normale à la surface et la tangente déterminée par les angles α, β et γ; son équation est

$$\begin{aligned}(\cos\beta + q\cos\gamma)(x'-x) - (\cos\alpha + p\cos\gamma)(y'-y)&\\ + (p\cos\beta - q\cos\alpha)(z'-z) = 0&,\end{aligned}$$

x', y', z', étant les coordonnées variables.

Les différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, doivent être telles, que la nouvelle tangente soit dans le plan sécant. Cette condition donne

$$(\cos\beta + q\cos\gamma)\,d\cos\alpha - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d\cos\beta$$
$$+ (p\cos\beta - q\cos\alpha)\,d\cos\gamma = 0.$$

Les axes étant rectangulaires, et les angles α, β et γ appartenant à une tangente, on a

$$(7)\qquad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ p\cos\alpha + q\cos\beta - \cos\gamma = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,$$
$$p d\cos\alpha + q d\cos\beta - d\cos\gamma + Z_2 dS = 0.$$

Nous avons maintenant trois équations pour déterminer $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ et $d\cos\gamma$, nous en déduisons

$$d\cos\alpha = -\frac{p}{p^2+q^2+1} Z_2 dS,\quad d\cos\beta = -\frac{q}{p^2+q^2+1} Z_2 dS;$$

portant ces valeurs dans l'équation (6), on a

$$dZ_2 = Z_3 dS - 2\frac{(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha}{p^2+q^2+1} Z_2,$$

et enfin, d'après les équations (5) et (4),

$$(8)\quad R\frac{dR}{dS} = \frac{-(p^2+q^2+1)Z_3 + 3Z_2[(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha]}{Z_2^3},$$

$$(9)\quad \frac{dR}{dS} = \frac{(p^2+q^2+1)Z_3 - 3Z_2[(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha]}{Z_2^2\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Il est à remarquer que $R\dfrac{dR}{dS}$ est égal au rayon de courbure de la développée de la section considérée; car, si ε est l'angle de contingence, les rayons de courbure de la section et de sa développée sont $\dfrac{dS}{\varepsilon}$ et $\dfrac{dR}{\varepsilon}$.

On peut construire une parabole surosculatrice d'une courbe en un point donné, quand on connaît le rayon de courbure R et sa dérivée

$\frac{dR}{dS}$. Si $x^2 - 2pz = 0$ est l'équation de la parabole, on a

$$p = \frac{R}{\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \qquad x = \frac{R\left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)}{\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

la première équation fait connaître le paramètre de la parabole; la seconde, l'abscisse du point où la surosculation peut être établie.

5. Proposons-nous de trouver sur une surface les sections normales qui peuvent être surosculées par un cercle. Pour les déterminer, il faut égaler à zéro la valeur de $\frac{dR}{dS}$,

$$(10)\quad \begin{cases} (p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) + w\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + u\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) + \frac{u}{3}\right) \\ - \left[(ps + qt)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + (pr + qs)\right]\left[t\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + 2s\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + r\right] = 0. \end{cases}$$

Cette équation, étant du troisième degré, donnera toujours au moins une valeur réelle pour $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, et par suite une surface a, en tout point, une section normale surosculée par un cercle; elle en a quelquefois trois, dont deux peuvent se confondre. Enfin, dans quelques points exceptionnels, il y en a une infinité. Si nous remplaçons $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ par $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (10), nous aurons l'équation différentielle des courbes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux sections normales surosculées par un cercle :

$$(11)\quad \begin{cases} (p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + u\frac{dy}{dx} + \frac{u}{3}\right] \\ - \left[(ps + qt)\frac{dy}{dx} + (pr + qs)\right]\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r\right] = 0. \end{cases}$$

Pour la surface du second degré, Z_2 est facteur commun dans l'équation (10); il représente les génératrices rectilignes qui sont, en effet, surosculées par un cercle d'un rayon infini. En le faisant disparaître, l'équation devient du premier degré : d'où l'on voit qu'en tout point de la surface du second degré il existe une seule section normale surosculée par un cercle d'un rayon fini.

Pour la surface réglée générale, Z_3 et Z_2 ont un facteur commun du premier degré qui représente les génératrices rectilignes. En le faisant disparaître, l'équation (10) devient du second degré; quelquefois il y aura deux solutions, d'autres fois il n'y en aura pas.

Il existe une infinité de surfaces du second ordre osculatrices en un de leurs sommets d'une surface quelconque en un point donné. Ces surfaces du second ordre traversent la surface considérée, et les courbes d'intersection sont évidemment tangentes aux sections normales surosculées par un cercle. Si la surface osculée est du second ordre, elle aura trois lignes communes avec la surface osculatrice; deux droites et une courbe tangente à la section normale surosculée par un cercle de rayon fini.

6. Pour la surface du second degré nous pourrons faire disparaître de l'équation (10) le facteur $\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r\right]$ qui représente les génératrices, et nous aurons

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{v}{3t}(p^2+q^2+1)-(ps+qt)\right]\frac{dy}{dx} \\ &+\left[\frac{u}{3r}(p^2+q^2+1)-(pr+qs)\right]=0. \end{aligned} \right.$$

Appliquant cette équation à la surface à centre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on trouve, après diverses simplifications qui se présentent spontanément,

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{xdx}{a^2}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{ydy}{b^2}=0;$$

d'où

$$(13)\qquad \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}=C.$$

Donc les courbes qui sont toujours tangentes aux sections normales surosculées par un cercle (comme les lignes de courbure aux sections principales), se projettent sur l'un quelconque des plans principaux de la surface suivant des courbes du second degré semblables entre elles. Ces projections sont des hyperboles sur le plan perpendiculaire à l'axe parallèle aux sections circulaires, et des ellipses sur les deux autres plans principaux.

Aux sommets de la surface, une section normale quelconque est surosculée par un cercle, mais elle n'est pas touchée par une des lignes que représente l'équation (13). Ces courbes enveloppent les sommets sans y passer; deux d'entre elles seulement se croisent aux sommets qui sont sur l'axe parallèle aux sections circulaires. Leur projection sur le plan perpendiculaire à cet axe est formée de deux droites que l'on obtient quand on fait la constante nulle dans l'équation (13). Elles sont par conséquent planes.

Si la surface est de révolution, les courbes sont des parallèles; si c'est une sphère, l'équation (13) disparaît, et toute courbe satisfait au problème.

Considérons maintenant la surface du second degré dépourvue de centre

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

portant les dérivées partielles dans l'équation (12), on trouve après l'intégration

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C,$$

et

$$z = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\frac{x^2}{a} + bC.$$

On voit que les projections des courbes sont des paraboles sur les plans principaux de la surface, et des ellipses sur le plan tangent au sommet.

7. Nous prendrons pour exemple de surface gauche la surface de la vis à filets carrés. Elle a pour équation

$$z = h\omega,$$

h est une constante et ω l'azimut de la projection horizontale d'un point. Si l'on appelle ρ la distance de ce point à l'axe vertical, on a

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\sin\omega}{\rho}, \qquad \frac{d\omega}{dy} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \qquad \frac{d\rho}{dx} = \cos\omega, \qquad \frac{d\rho}{dy} = \sin\omega.$$

Calculant d'après ces formules les dérivées partielles de la fonction z, et les portant dans l'équation (9), on obtient

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h^2+\rho^2}{h^2}\left[\dfrac{1}{3}\cos 3\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^3 - \sin 3\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 - \cos 3\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{3}\sin 3\omega\right] \\ - \left(\sin\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \cos\omega\right)\left[\dfrac{1}{2}\sin 2\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \cos 2\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \dfrac{1}{2}\sin 2\omega\right] \end{array}\right\} = 0.$$

Dans la surface de la vis à filets carrés les courbures sont identiques le long des différentes génératrices; on peut donc se borner à étudier ce qui se passe pour l'une d'elles, celle dont l'azimut est nul. Faisant $\omega = 0$, on trouve

$$(14) \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\left[\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 - \frac{3\rho^2}{h^2+\rho^2}\right] = 0.$$

Si l'on appelle μ l'angle que forme avec l'axe des abscisses la projection de la tangente à la section normale qui est surosculée par un cercle, on a

$$\operatorname{tang}\mu\left(\operatorname{tang}^2\mu - \frac{3\rho^2}{h^2+\rho^2}\right) = 0.$$

Nous trouvons trois valeurs pour $\operatorname{tang}\mu$: l'une nulle indique la génératrice rectiligne; nous aurions pu la faire disparaître dès le commencement du calcul en mettant en évidence et supprimant le facteur $\left(\cos\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \sin\omega\right)$. Les autres valeurs de μ sont toujours réelles, et, par suite, en tout point de la surface deux sections normales ont un contact du troisième ordre avec leur cercle osculateur. Si nous remplaçons $\operatorname{tang}\mu$ par l'expression analytique de la tangente de l'angle qu'une courbe fait avec son rayon vecteur, nous aurons l'équation différentielle des lignes tangentes aux sections normales qui sont surosculées par un cercle :

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \sqrt{3}\,\frac{\rho}{\sqrt{h^2+\rho^2}}.$$

Intégrant, on a

$$\rho = \frac{h}{2} e^{\frac{\omega-\omega'}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\rho'}{h} + \sqrt{\frac{\rho'^2}{h^2} + 1}\right) - \frac{h}{2} e^{-\frac{\omega-\omega'}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\rho'}{h} + \sqrt{\frac{\rho'^2}{h^2} + 1}\right)^{-1};$$

ρ' et ω' sont les coordonnées du point par lequel on fait passer la courbe. En donnant successivement les deux signes au radical, on trouve les deux courbes qui passent par chaque point.

Les cosinus des angles α, β et γ sont toujours liés par les équations (7); la seconde se simplifie parce qu'ici p est nul. Avec ces deux équations et l'équation (14) on peut calculer $\cos\alpha$; on trouve que sa valeur est $\pm\frac{1}{2}$, d'où il résulte que les lignes que nous étudions rencontrent les génératrices rectilignes, et se coupent elles-mêmes suivant des angles de 60 degrés.

8. L'équation (11) se simplifie encore pour les surfaces de révolution; ses deux termes contiennent alors, en effet, un facteur commun qui représente les parallèles. On peut le mettre en évidence en prenant les équations aux différences partielles des trois premiers ordres des surfaces de révolution, et éliminant avec elles cinq dérivées, par exemple p, q, w, u et v.

Nous allons opérer d'une manière différente qui permettra de discuter plus facilement les résultats.

Soit

$$z = f(\rho)$$

une équation qui représentera la surface de révolution ou sa méridienne, suivant que l'on considérera ρ comme un rayon vecteur ou comme une abscisse.

Employant le même artifice qu'à l'article 7, nous calculons les dérivées partielles, et, après y avoir fait ω nul, nous portons leurs valeurs dans l'équation (11); nous avons ainsi

$$(15) \qquad \operatorname{tang}^2\mu = \rho^2 \frac{\frac{dz}{d\rho}\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + 1\right]\frac{d^3z}{d\rho^3}}{\rho\frac{d^2z}{d\rho^2} - \frac{dz}{d\rho}\left[\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + 1\right]},$$

μ représente comme à l'article 7 l'angle que forme avec l'axe des abscisses la projection de la tangente à la section normale qui est surosculée par un cercle, $\tang \mu$ remplace $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

L'équation (15) n'est que du second degré; le coefficient du terme du troisième degré est nul, ce qui donne pour μ une valeur de 90 degrés qui indique les parallèles.

Si l'on veut avoir l'équation des courbes, il faudra remplacer $\tang \mu$ dans l'équation (15) par $\rho \frac{d\omega}{d\rho}$, et intégrer.

Appelant g le rayon de courbure de la méridienne, nous aurons

$$g = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{d\rho^2}},$$

et différentiant,

$$\frac{dg}{d\rho} = -3\frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2}\left\{\frac{dz}{d\rho}\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]\frac{d^3z}{d\rho^3}\right\}.$$

D'après ces valeurs l'équation (14) devient

$$(16) \qquad \tang^2 \mu = -\frac{1}{3}\rho^2 \frac{\frac{d^2z}{d\rho^2}\frac{dg}{d\rho}}{\rho\left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + g\frac{dz}{d\rho}};$$

$\tang \mu$ est constamment nul pour le tore et le cône; les méridiens de ces surfaces satisfont en effet à la question. Pour les autres surfaces de révolution on trouve deux séries de lignes qui se croisent en rencontrant toujours les méridiens sous des angles égaux. Ces lignes disparaissent quand la valeur de $\tang^2 \mu$ est négative. On déduit de l'équation (16) une méthode géométrique pour reconnaître quand ces lignes existent réellement.

Si l'on égale à zéro le dénominateur du second membre de l'équation (15), on trouve, en intégrant, un cercle qui a son centre sur l'axe. La surface est alors une sphère. Le numérateur de l'équation (15) devient nul en même temps que le dénominateur, et $\operatorname{tang}\mu$ est arbitraire.

9. Si l'on étudie la courbure d'une surface en un point, on pourra simplifier les équations (8) et (9) en supposant le plan tangent horizontal. On aura alors

$$(17)\qquad \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}} = -\frac{v\sin^3\alpha + 3w\sin^2\alpha\cos\alpha + 3u\sin\alpha\cos^2\alpha + u\cos^3\alpha}{(t\sin^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + r\cos^2\alpha)^3}$$

et

$$(18)\qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}} = \frac{v\sin^3\alpha + 3w\sin^2\alpha\cos\alpha + 3u\sin\alpha\cos^2\alpha + u}{(t\sin^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + r\cos^2\alpha)^2}.$$

Si l'on projette sur le plan tangent les centres de courbure des développées des sections normales, on a une courbe qui est représentée par (15), l'azimut étant α et le rayon vecteur étant $\frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}}$. Cette courbe est généralement du sixième degré; elle descend au cinquième degré pour les surfaces gauches, et au quatrième pour celles qui sont du second ordre. Elle a deux asymptotes qui sont parallèles aux asymptotes de l'indicatrice.

La courbe située dans le plan tangent et telle, que ses rayons vecteurs seraient proportionnels aux dérivées $\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}}$, n'est que du quatrième degré. Son équation en coordonnées rectilignes est

$$(ty^2 + 2sxy + rx^2)^2 + vy^3 + 3wxy^2 + 3ux^2y + ux^3 = 0.$$

Le degré de l'équation s'abaisse d'une unité pour les surfaces gauches. Pour les surfaces du second ordre, l'équation devient

$$ty^2 + 2sxy + rx^2 + \frac{v}{t}y + \frac{u}{r}x = 0;$$

aux ombilics la courbe est un cercle.

On voit que les surfaces du second ordre et les surfaces simplement réglées forment, pour les courbures, des catégories spéciales, et qu'une surface ne peut être surosculée par une surface du second ordre ou par une surface réglée qu'en des points exceptionnels.

Sur un théorème relatif à l'intégrale eulérienne de seconde espèce;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il s'agit de l'équation célèbre

$$(A)\qquad \Gamma(t)\Gamma\left(t+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(t+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nt}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.\Gamma(nt),$$

que Gauss a établie de la manière la plus simple, en définissant $\Gamma(t)$ comme la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots s.s^{t-1}}{t(t+1)(t+2)\ldots(t+s-1)},$$

lorsque le nombre entier s augmente à l'infini. Cette définition, qui permet de donner à t une valeur quelconque, positive ou négative, réelle ou imaginaire, offre sans contredit la base la meilleure pour la théorie de la fonction $\Gamma(t)$. Elle fournit d'ailleurs de suite la valeur de cette fonction en intégrale définie, et ne laisse pour ainsi dire échapper aucune des particularités du sujet, tout en lui donnant plus d'étendue.

Au point de vue des progrès du calcul intégral, on a toutefois naturellement désiré d'avoir une démonstration de la formule (A) uniquement tirée des procédés propres à ce calcul, et de la définition de Legendre, qui pose

$$(B)\qquad \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx:$$

cela exige que l'on se borne d'abord aux valeurs de t positives, ou du moins à partie réelle positive, pour lesquelles seules l'intégrale a un sens précis; sauf à prolonger plus tard la fonction $\Gamma(t)$ hors de ces limites (comme je l'ai fait au tome XI du Journal de M. Crelle, page 5, à une époque où la définition générale de Gauss m'était inconnue) au moyen de l'équation

$$(C)\qquad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \text{ou} \quad \Gamma(t) = \Gamma(t+1):t,$$

que l'on obtient de suite quand la partie réelle de t est positive, et que l'on peut étendre par un complément de définition au cas où cette partie réelle est égale à o ou comprise entre o et -1, puis au cas où elle est égale à -1 ou comprise entre -1 et -2, et ainsi de suite; d'où résulte une valeur de $\Gamma(t)$ en intégrale définie successivement propre à ces divers cas.

Il faut citer surtout, comme remplissant parfaitement ce but spécial de tirer du calcul intégral seul les propriétés des intégrales eulériennes, un excellent Mémoire de M. Lejeune-Dirichlet (Journal de M. Crelle, tome XV). Je me place au même point de vue que l'illustre géomètre; mais on verra que ma méthode pour la formule (A) diffère entièrement de la sienne, où l'on opère sur le logarithme de $\Gamma(t)$. Je ne dirai qu'un mot des formules

$$\text{(D)} \qquad \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\,dx = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(t)}{\Gamma(r+t)},$$

et

$$\text{(E)} \qquad \Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}$$

qu'Euler, du reste, connaissait déjà. Pour la formule (D), on a la démonstration toute simple de Poisson, rappelée au tome IV du présent Journal, page 227. Quant à la formule (E), elle se déduit de l'équation (D) en y prenant $r = 1 - t$, ce qui donne

$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \int_0^1 x^{-t}(1-x)^{t-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{t-1}\,dy}{1+y}.$$

L'intégrale relative à y est composée de deux parties où y va de o à 1, puis de 1 à ∞ : on ramène la seconde aux limites de la première en remplaçant y par $\frac{1}{y}$, et l'on a

$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \int_0^1 (y^{t-1} + y^{-t})\frac{dy}{1+y},$$

après quoi, développant en série suivant les puissances de y sous le signe d'intégration, l'on obtient

$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-4} - \ldots = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}.$$

On pourrait varier ces démonstrations; mais comme je n'ai en vue, pour le moment, que la formule (A), je termine ces préliminaires en écrivant l'équation connue

$$\text{(F)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

trop facile à déduire de la formule (E) pour que je m'y arrête.

Cela posé, je vais montrer que la formule (A) est une conséquence presque immédiate de la valeur que j'ai donnée d'une intégrale définie multiple dans le dernier cahier de ce Journal (page 133). En faisant

$$P = (1 + ax_1)(1 + ax_1 + ax_2)\ldots(1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1})$$

et

$$Q = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}), \quad p = \frac{1-\mu}{n}, \quad q = \frac{\mu}{n} - 1,$$

cette intégrale est

$$U = \int\int\cdots\int P^p Q^q\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs positives de x_1, $x_2,\ldots,$ x_{n-1} pour lesquelles on a $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1$. Je me suis assuré que

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a}-1}{a}\right)^{\mu-1}.$$

On peut supposer que la première intégration est relative à x_{n-1} et qu'elle a lieu entre les limites 0 et $1 - x_1 - \ldots - x_{n-2}$. En substituant à x_{n-1} une variable y_{n-1} telle que

$$y_{n-1}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2}) = x_{n-1},$$

les limites pour y_{n-1} seront 0 et 1. La seconde intégration relative à x_{n-2}, entre les limites 0 et $1 - x_1 - \ldots - x_{n-3}$, sera de même remplacée par une intégration entre 0 et 1, en faisant

$$y_{n-2}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-3}) = x_{n-2}.$$

On continuera ainsi; et arrivé à l'intégrale relative à x_2, entre les limites 0 et $1 - x_1$, on posera

$$y_2(1 - x_1) = x_2,$$

de manière à avoir 0 et 1 pour limites de y_2. Quant à la dernière intégration, relative à x_1, c'est entre ces limites 0 et 1 qu'elle doit s'opérer.

Or il arrive qu'en posant $a = -1$, toutes les intégrations relatives à $x_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$, entre les limites fixes 0 et 1, deviennent indépendantes les unes des autres; en sorte qu'on n'a plus à effectuer qu'un produit d'intégrales eulériennes de première espèce, dont chacune s'exprime en Γ par la formule (D). Cela tient à ce que, pour $a = -1$, les quantités $1 + ax_1$, $1 + ax_1 + ax_2, \ldots$, $1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1}$ se réduisent à celles-ci $1 - x_1$, $1 - x_1 - x_2, \ldots$, $1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}$, et par conséquent se décomposent comme elles en produits où les variables sont séparées, puisque l'on a

$$1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_m = (1 - x_1)(1 - y_2)(1 - y_3)\ldots(1 - y_m).$$

Un calcul facile donne, réductions faites,

$$U = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)},$$

ou bien

$$U = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^{n-1} . n^{-\frac{1}{2}} . (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)},$$

eu égard à l'équation (F).

Mais la formule générale

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu-1}$$

devient, pour $a = -1$,

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n.$$

En égalant cette valeur à la précédente, on a donc

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu} . (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} . \Gamma(\mu).$$

Maintenant remplacez μ par nt, et vous aurez précisément la formule (A) qu'il s'agissait de démontrer.

SUR L'ÉQUATION

$$\Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}.\sqrt{\pi}.\Gamma(2t);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

L'équation

$$(1)\qquad \Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2t}.\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2t),$$

dont je veux dire ici quelques mots, n'est qu'un cas particulier de la formule

$$(\mathrm{A})\quad \Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(t+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nt}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.\Gamma(nt),$$

qui a fait l'objet de l'article précédent. Elle répond à $n=2$, et il est aisé d'en conclure le cas de n puissance quelconque de 2.

La formule (1), qui offre des facilités spéciales, a été obtenue avant la formule (A). Vous la trouvez, ou du moins vous trouvez une formule équivalente, à la page 284 des *Exercices de calcul intégral*, publiés en 1811 par Legendre, qui sans doute n'avait alors aucune idée de l'existence de la formule générale (A).

Legendre, à l'endroit cité, prouve que

$$\Gamma(t)=\frac{2^{1-2t}}{\sqrt{\pi}}\cos(\pi t).\Gamma(2t).\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right).$$

Or substituez à

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)$$

sa valeur déduite de l'équation

$$\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)=\frac{\pi}{\cos(\pi t)},$$

qui résulte de l'équation d'Euler

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)},$$

en y remplaçant t par $t+\frac{1}{2}$; et vous aurez

$$\Gamma(t) = \frac{2^{1-2t}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi\Gamma(2t)}{\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)},$$

c'est-à-dire la formule (1).

La démonstration que j'ai donnée de la formule (A) étant appliquée à la formule particulière (1) se réduit à ce qui suit.

Je prends pour point de départ l'équation

$$\int_0^1 x^{\frac{\mu}{2}-1}(1-x)^{\frac{\mu}{2}-1}(1+ax)^{\frac{1-\mu}{2}}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{1+a}-1}{a}\right)^{\mu-1},$$

qu'il faut admettre comme bien établie. En y posant $a=-1$, il vient

$$\int_0^1 x^{\frac{\mu}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2.$$

Mais on sait que le premier membre de cette dernière équation est aussi égal à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}.$$

La formule (1) est une conséquence de l'égalité de ces deux valeurs, en prenant $\mu = 2t$, et eu égard à ce que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Au lieu de faire $a=-1$, on pourrait faire $a=\infty$, ce qui donne

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{\mu}{2}-1}dx = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2;$$

le calcul serait le même, car les deux membres ont les mêmes valeurs que ci-dessus.

On peut encore tirer la formule (1) de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u)\cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u)\cos u\,du,$$

dont on a donné au tome XVIII du présent Journal une démonstration rigoureuse et très-simple.

Prenez

$$\varphi(y) = y^m:$$

il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2u \cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} u\,du;$$

d'où l'on tire

$$2^m \int_0^1 x^{\frac{m-1}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}}\,dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^m\,dx,$$

en se rappelant que

$$\sin 2u = 2\sin u \cos u,$$

et en posant

$$\sin u = \sqrt{x}.$$

Il faut en conclure que

$$2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+1),$$

et, par suite,

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right) = 2^{-m}.\sqrt{\pi}.\Gamma(m+1);$$

d'où la formule (1) résulte en posant

$$m = 2t - 1.$$

FORMULES GÉNÉRALES

Relatives à la question de la Stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe;

Par M. J. LIOUVILLE [*].

1. Rapportons d'abord les points de la masse liquide à trois axes rectangulaires fixes Ox', Oy', Oz. Soient p la pression au point (x', y', z) et t le temps écoulé depuis une certaine époque. En vertu du principe de d'Alembert combiné avec l'hypothèse de l'égalité de pression en tous sens que nous admettrons ici, on a ces trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx'} &= \rho\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dy'} &= \rho\left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right),\end{aligned}\right.$$

où X', Y', Z désignent les composantes parallèles aux trois axes de la force accélératrice qui agit sur le point (x', y', z); ρ est la densité constante du liquide.

Maintenant, imaginons deux axes Ox, Oy perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz, et, de plus, animés autour de ce dernier axe d'un mouvement commun de rotation dont la vitesse angulaire peut varier d'un instant à l'autre. Soit θ l'angle compris entre Ox et Ox', θ étant

[*] Extrait du premier paragraphe d'un Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des mers*, communiqué à l'Académie des Sciences le 14 novembre 1842 (voir *Comptes rendus*, tome XV, page 903). Cet extrait a été inséré il y a trois ans dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1855. J'ai cru convenable de le reproduire ici.

une fonction de t; on aura

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

La pression p qui était fonction de t, x', y', z deviendra ainsi fonction de t, x, y, z; ses dérivées partielles relativement à x et y seront

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{dp}{dy'}\frac{dy'}{dx} = \cos\theta\frac{dp}{dx'} + \sin\theta\frac{dp}{dy'},$$
$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx'}\frac{dx'}{dy} + \frac{dp}{dy'}\frac{dy'}{dy} = \cos\theta\frac{dp}{dy'} - \sin\theta\frac{dp}{dx'},$$

ou bien, à cause des équations (1),

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(X'\cos\theta + Y'\sin\theta - \cos\theta\frac{d^2x'}{dt^2} - \sin\theta\frac{d^2y'}{dt^2}\right).$$
$$\frac{dp}{dy} = \rho\left(Y'\cos\theta - X'\sin\theta - \cos\theta\frac{d^2y'}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2x'}{dt^2}\right):$$

Mais $X'\cos\theta + Y'\sin\theta$, $Y'\cos\theta - X'\sin\theta$ sont les composantes de la force accélératrice suivant les axes Ox, Oy; nous les représenterons par X, Y. D'un autre côté, il est aisé de former les différentielles secondes $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, et, par suite, de calculer les deux quantités

$$\cos\theta\frac{d^2x'}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \cos\theta\frac{d^2y'}{dt^2} - \sin\theta\frac{d^2x'}{dt^2};$$

on les trouve respectivement égales à

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{dy}{dt}\frac{d\theta}{dt} - y\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} + x\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De là résulte

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left[X - \frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{dy}{dt}\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2}\right],$$
$$\frac{dp}{dy} = \rho\left[Y - \frac{d^2y}{dt^2} + y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right].$$

Ces deux équations nouvelles, jointes à l'ancienne équation

$$\frac{dp}{dz} = \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

remplaceront les équations (1). On les mettra sous une autre forme en représentant par u, v, w les composantes parallèles aux axes mobiles Ox, Oy, Oz de la vitesse relative qui a lieu en (x, y, z), c'est-à-dire en faisant

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

puis en exprimant les composantes X, Y, Z de la force accélératrice par les dérivées partielles d'une seule fonction V, comme on en a le droit lorsque cette force résulte d'actions attractives fonctions des distances. On a ainsi finalement

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left[\frac{dV}{dx} - \frac{1}{dt}du + x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2}\right], \\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left[\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dt}dv + y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right], \\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dt}dw\right). \end{aligned} \right.$$

Les différentielles de u, v, w, qui entrent dans ces équations sont des différentielles totales : en les développant on a, par exemple,

$$\frac{1}{dt}du = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

expression qu'on pourrait toutefois, dans le cas des oscillations très-petites dont nous nous occupons surtout, réduire à son premier terme par rapport auquel les autres sont négligeables. Quant aux forces exprimées par les dérivées partielles de V, elles proviendront toujours, dans ce Mémoire, d'actions attractives proportionnelles aux masses, et en raison inverse du carré de la distance; V sera donc la somme des éléments des masses agissantes divisées chacun par sa distance au point (x, y, z). De plus, dans les questions de stabilité que nous nous proposons de résoudre, les masses dont nous parlons se réduiront à celles du liquide lui-même et du noyau solide à la surface duquel ce liquide peut être placé.

Aux trois équations (2) il faut joindre naturellement l'équation dite de continuité, qui exprime la condition d'incompressibilité du liquide. Cette équation, savoir

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

a la même forme et se démontre de la même manière que si Ox, Oy, Oz étaient des axes fixes.

2. L'équation (3), multipliée par $dxdydz$, puis intégrée dans toute l'étendue de la masse liquide, conduit à une conséquence évidente du reste *à priori*, mais qui nous sera très-utile plus tard. Si l'on décompose, en effet, en trois parties le premier membre de l'équation

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0,$$

on voit qu'une des intégrations s'effectue de suite. En se bornant à l'intégrale indéfinie, on a, par exemple,

$$\int\int\int\frac{du}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int u\,dy\,dz.$$

Pour passer de là à l'intégrale définie, observons que, pour chaque couple de valeurs de y et z, les produits $u\,dy\,dz$ sont relatifs aux points où une même parallèle à l'axe des x entre dans la masse liquide ou sort de cette masse, et que, de plus, ces produits doivent être pris successivement avec le signe $-$ et le signe $+$ en allant du premier au dernier dans le sens des x positives; d'un autre côté, si $d\omega$ désigne l'élément de la surface liquide qui répondant tour à tour à ces divers points d'entrée ou de sortie a $dy\,dz$ pour projection sur le plan des yz, et α l'angle que fait avec l'axe des x la normale à $d\omega$ menée en dehors du liquide, on aura successivement aussi

$$dy\,dz = -\cos\alpha\,d\omega, \quad \text{puis} \quad dy\,dz = \cos\alpha\,d\omega,$$

puisque $dydz$ et $d\omega$ sont des quantités positives, et que l'angle α est obtus, puis aigu alternativement. Les produits $u\,dy\,dz$, pris avec le signe qu'ils doivent avoir dans l'intégrale définie, sont donc égaux à $u\cos\alpha\,d\omega$, et l'on a, pour le premier terme de notre équation, l'expression simple

$$\int\int\int\frac{du}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int u\cos\alpha\,d\omega;$$

l'intégrale relative à $d\omega$ s'étendant non-seulement à toute la surface libre du liquide, mais encore, dans le cas d'un noyau solide, à la surface commune au liquide et au noyau, et s'il se forme un vide dans l'intérieur de la masse, à la surface par laquelle ce vide est limité.

En désignant par β, γ les angles que la normale à $d\omega$ fait avec Oy et Oz, on trouvera de même

$$\iiint \frac{dv}{dy}\, dx\, dy\, dz = \iint v \cos\beta\, d\omega,$$
$$\iiint \frac{dw}{dz}\, dx\, dy\, dz = \iint w \cos\gamma\, d\omega.$$

Il s'ensuit que

$$\iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\omega = 0.$$

Or $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$ est précisément la composante de la vitesse des molécules liquides placées à la surface $d\omega$, dans une direction normale à cette surface $d\omega$. On conclut de là que *si l'on fait à chaque instant la somme des produits de chacun des éléments de la surface du liquide par la vitesse normale correspondante, cette somme sera égale à zéro.* C'est ce que l'on pouvait voir *à priori*, car le volume total du liquide est supposé invariable, et la somme des produits dont nous parlons, multipliée par l'élément dt du temps, exprime précisément la variation que ce volume éprouve pendant l'instant dt; j'ai pensé néanmoins devoir en donner la démonstration précédente, où l'on emploie le calcul intégral. L'artifice (bien connu des géomètres) à l'aide duquel nous avons introduit dans nos calculs l'élément de surface $d\omega$, devant en effet être mis en usage plusieurs fois dans le cours de ce Mémoire, il était bon de l'appliquer d'abord à un exemple simple.

3. Les questions de stabilité se résolvant d'ordinaire par la considération de la force vive du système dont on s'occupe, cherchons pour notre masse liquide l'expression de cette force vive $\sum(m s^2)$, où $s^2 = u^2 + v^2 + w^2$. En posant

$$\rho V + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - p = \rho\varphi,$$

on tire des équations (2),

$$\frac{1}{dt}du = \frac{d\varphi}{dx} + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{1}{dt}dv = \frac{d\varphi}{dy} - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{1}{dt}dw = \frac{d\varphi}{dz}.$$

On obtiendra la force vive $\sum(m8^2)$ en multipliant par les facteurs respectifs $2\rho u\,dt\,dx\,dy\,dz$, $2\rho v\,dt\,dx\,dy\,dz$, $2\rho w\,dt\,dx\,dy\,dz$ les premiers membres de ces équations, et formant ainsi la quantité

$$2(u\,du + v\,dv + w\,dw)\rho\,dx\,dy\,dz = md.8^2,$$

laquelle, d'après les équations ci-dessus, est équivalente à

$$2\rho\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt,$$

puis intégrant par rapport au temps en suivant pour ainsi dire chaque molécule m dans son mouvement, ce qui donne $m8^2$; puis intégrant de nouveau pour toutes les molécules m, d'où résulte la force vive cherchée $\sum(m8^2)$. Mais il reviendra au même d'intégrer d'abord la quantité

$$2\rho\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

par rapport à x, y, z, en laissant t constant et en parcourant le volume total occupé par le liquide à chaque instant t, puis d'intégrer ensuite par rapport à t jusqu'à la valeur actuelle de cette variable. Dans cette nouvelle manière de procéder, les limites de x, y, z dans nos intégrales seront fonctions de t, et l'expression de $\sum(m8^2)$, à une constante près, dépendante de la force vive initiale, deviendra

$$2\rho\int dt\iiint\left[\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]dx\,dy\,dz.$$

Cette expression se décompose en deux parties, savoir

$$2\rho\int dt\iiint\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w\right)dx\,dy\,dz$$

et

$$2\rho\int dt\iiint(uy-vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}dx\,dy\,dz.$$

La dernière peut s'écrire

$$2\rho\int\frac{d^2\theta}{dt^2}dt\iiint(uy-vx)dx\,dy\,dz.$$

Or les hypothèses que nous adopterons dans le cours de ce Mémoire sur la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ avec laquelle les axes Ox, Oy tournent autour de Oz rendront toujours nul un des facteurs

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \iiint(uy-vx)\,dx\,dy\,dz$$

de l'élément qu'on doit intégrer par rapport au temps, ce qui rendra nulle l'intégrale elle-même. Nous admettrons, en effet, ou que $\frac{d\theta}{dt}$ est une constante n, auquel cas $\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$; ou que $\frac{d\theta}{dt}$ a pour valeur la vitesse angulaire moyenne de rotation des molécules liquides autour de Oz, je veux dire a pour valeur la vitesse de rotation qui conviendrait par le principe des aires à notre masse liquide tout à coup solidifiée et abandonnée à elle-même; le mouvement des axes Ox, Oy est alors tel, qu'il n'y a en quelque sorte, relativement à eux, aucune aire décrite sur le plan des xy, les aires positives étant compensées exactement par les aires négatives, et l'on a

$$\iiint(uy-vx)\,dx\,dy\,dz=\iiint\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

D'après cela, nous écrirons simplement

$$\sum(m\varkappa^2)=2\rho\int dt\iiint\left(\frac{d\varphi}{dx}u+\frac{d\varphi}{dy}v+\frac{d\varphi}{dz}w\right)dx\,dy\,dz+\text{const.}$$

Considérons en particulier l'intégrale

$$\iiint\frac{d\varphi}{dx}u\,dx\,dy\,dz,$$

où $dx\,dy\,dz$ représente l'un après l'autre les éléments du volume du liquide. En intégrant par parties, elle devient

$$\iint u\varphi\, dy\, dz - \iiint \varphi \frac{du}{dx}\, dx\, dy\, dz;$$

les éléments de l'intégrale double se rapportent à la surface du liquide; on peut donc, comme au n° **2**, introduire l'élément $d\omega$ et les angles α, β, γ pour passer de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie; il vient ainsi, pour valeur de l'intégrale citée,

$$\iint u \cos\alpha . \varphi\, d\omega - \iiint \varphi \frac{du}{dx}\, dx\, dy\, dz;$$

les intégrales

$$\iiint \frac{d\varphi}{dy} v\, dx\, dy\, dz, \quad \iiint \frac{d\varphi}{dz} w\, dx\, dy\, dz,$$

sont de même respectivement égales à

$$\iint v \cos\beta\, \varphi\, d\omega - \iiint \varphi \frac{dv}{dy}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\iint w \cos\gamma\, \varphi\, d\omega - \iiint \varphi \frac{dw}{dz}\, dx\, dy\, dz.$$

En ajoutant ces trois quantités, on aura la valeur de

$$\iiint \left(\frac{d\varphi}{dx} u + \frac{d\varphi}{dy} v + \frac{d\varphi}{dz} w\right) dx\, dy\, dz;$$

cette somme est composée de deux termes, savoir d'une intégrale double

$$\iint (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi\, d\omega,$$

puis d'une intégrale triple, qui se retranche de la première,

$$\iiint \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) \varphi\, dx\, dy\, dz;$$

mais cette intégrale triple est nulle en vertu de l'équation (3). C'est donc à l'intégrale double que se réduit la somme indiquée. Il suit immédiatement de là que

$$(4) \quad \sum (m\mathfrak{v}^2) = 2\rho \int dt \iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\varphi\, d\omega + \text{const.}$$

L'élément $d\omega$ ne se rapporte pas seulement à la surface libre du liquide, mais, en outre, s'il se forme un vide, à la surface qui limite ce vide, et s'il y a un noyau solide, à la surface commune au liquide et au noyau. Cela résulte de la manière même dont cet élément a été introduit dans nos formules.

4. Quand il s'agit de trouver la condition de stabilité pour une masse liquide placée à la surface d'un noyau solide animé autour de l'axe Oz d'un mouvement uniforme de rotation dont n est la vitesse angulaire, il est commode de supposer la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ constante aussi et égale à n, de telle sorte que le noyau solide reste immobile par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. Quand on s'occupera du mouvement d'une masse entièrement liquide qui tourne autour d'un axe Oz passant par son centre de gravité O, on pourra encore attribuer à $\frac{d\theta}{dt}$ une valeur constante n; et si la figure primitive d'équilibre est de révolution autour de Oz, comme cela arrive pour les ellipsoïdes de Maclaurin, il n'y aura aucun inconvénient à continuer de prendre pour valeur de n celle de la vitesse angulaire qui avait lieu dans l'état d'équilibre. Mais rien n'empêcherait non plus d'adopter une valeur de n un peu plus grande ou un peu plus petite, et relative à la rotation d'une autre figure d'équilibre, voisine de celle que le liquide affectait d'abord. Cela revient, au reste, à modifier la figure d'équilibre à laquelle on rapporte les perturbations. Par exemple, on peut choisir cette figure telle, qu'elle réponde à la somme des aires décrites sur le plan fixe $x'Oy'$, au premier instant dt, dans le mouvement troublé, par les projections des rayons vecteurs menés de l'origine O à toutes les molécules égales du système : dès lors cette somme devra toujours rester la même que dans l'état d'équilibre. Les considérations précédentes seront d'une grande importance dans la théorie des ellipsoïdes à trois axes inégaux de M. Jacobi, si l'on veut *à priori*, en s'en occupant, faire dans nos formules $\frac{d\theta}{dt}$ constante. Mais quand la figure primitive d'équilibre est un des ellipsoïdes de M. Jacobi, la nature de la question semble en quelque sorte inviter à prendre pour valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire moyenne de la masse liquide, vitesse qui, pour une masse connue et une somme d'aires décrites aussi connue,

varie d'un instant à l'autre avec le moment d'inertie. Examinons successivement les deux hypothèses que nous venons d'indiquer concernant la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, et voyons comment, en se bornant à considérer des oscillations très-petites, on ramène à sa forme la plus simple le second membre de l'équation (4).

3. Soit d'abord $\frac{d\theta}{dt}$ = une constante n; on aura

$$\rho\varphi = \rho V + \frac{\rho n^2}{2}(x^2 + y^2) - p = \rho W - p,$$

en posant

$$W = V + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2).$$

L'intégrale

$$\int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,\varphi\,d\omega$$

sera donc la différence des deux suivantes :

$$\int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,W\,d\omega,$$

et

$$\frac{1}{\rho}\int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,p\,d\omega;$$

mais la seconde de ces deux intégrales est nulle, du moins lorsqu'on exclut (ce qui n'a évidemment aucun inconvénient dans nos questions de stabilité) le cas particulier où il se ferait un vide dans l'intérieur de la masse en mouvement. En effet, pour tous les éléments $d\omega$ qui peuvent appartenir à la surface commune du liquide et d'un noyau solide, la vitesse $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$, normale à $d\omega$, doit être nulle, puisque le noyau reste immobile par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, et que, par suite, les molécules liquides avoisinantes ne peuvent que glisser dans une direction tangentielle; on peut donc faire abstraction de la partie de notre intégrale qui répond à de tels éléments. D'un autre côté, à la surface libre du liquide, p est une constante que l'on peut faire sortir des signes $\int$; on obtient ainsi l'expression

$$\frac{p}{\rho}\int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\omega;$$

or le second facteur de ce produit est nul, car il revient précisément à l'intégrale considérée n° **2**, en supprimant seulement dans cette intégrale la partie nulle d'elle-même qui répond à la surface commune au liquide et au noyau.

Dans l'intégrale

$$\iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,\mathrm{W}\,d\omega,$$

on peut regarder la valeur de W comme composée de deux parties, dont l'une se rapporte à l'état d'équilibre et l'autre à la variation que W éprouve pendant le mouvement. A cet effet, considérons chaque point M de la surface d'équilibre, menons par ce point une normale à cette surface, et soit, au bout d'un temps t quelconque, ζ l'élévation positive ou négative (comptée sur la normale qui part du point M) de la surface libre du liquide en mouvement au-dessus de la surface d'équilibre. Nous supposerons que cette élévation ζ réponde à l'élément $d\omega$ de la surface libre du liquide en mouvement; ζ' sera de même l'élévation correspondante à un autre élément $d\omega'$. Bornons-nous d'ailleurs au cas des oscillations très-petites, en sorte que ζ soit une très-petite quantité. Soit U la valeur que W avait dans l'état d'équilibre, pour un point quelconque et spécialement pour le point M; U désignera dans cet état la *fonction* des forces (j'entends par là, avec M. Jacobi, la fonction dont les dérivées partielles fournissent les composantes des forces accélératrices qui agissent sur les divers points du liquide et parmi lesquelles je comprends la force centrifuge). L'état d'équilibre continuant à subsister, si l'on se transporte du point M au point extrême de la petite normale ζ, W ou U éprouvera par ce seul déplacement une variation exprimée par $\frac{d\mathrm{U}}{d\zeta}\zeta$ ou par $-g\zeta$, g désignant la pesanteur qui a lieu à la surface dans l'état d'équilibre, laquelle pesanteur est, au signe près, exprimée par $\frac{d\mathrm{U}}{d\zeta}\cdot$ Mais la figure du liquide étant de plus altérée par l'état du mouvement, V et, par suite, W augmentent de toute la valeur due à l'excès de la figure actuelle du liquide sur la figure d'équilibre; cette valeur est

$$\rho\iint\frac{\zeta'\,d\omega'}{\Delta},$$

Δ désignant la distance de chacune des petites masses $\rho\zeta' d\omega'$ au point (x, y, z) situé à l'extrémité de la normale ζ. La valeur complète de W est, d'après cela,

$$W = U - g\zeta + \rho \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta}.$$

Le premier terme U se rapporte à l'état d'équilibre; il est, comme on sait, constant, et, par suite, on peut le faire sortir du signe $\int$, quand on s'occupe de l'intégrale

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, U d\omega;$$

cette intégrale se réduit donc à zéro par la même raison qui a fait disparaître celle où entrait la pression p. Ainsi, dans l'intégrale

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, W d\omega,$$

on peut négliger le premier terme U de W. Il reste à substituer les deux derniers termes, et c'est ce que nous allons faire en observant, de plus, que, dans l'hypothèse des petites oscillations, la composante $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$ de la vitesse, estimée dans une direction normale à $d\omega$, se réduit sensiblement à $\frac{d\zeta}{dt}$: nous trouvons ainsi pour

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, W d\omega,$$

et, par conséquent, pour

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi d\omega,$$

la valeur suivante,

$$-\int\int g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega + \rho \int\int \frac{d\zeta}{dt} d\omega \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta},$$

dans laquelle on pourra même regarder $d\omega$ et $d\omega'$ comme exprimant les éléments de la surface libre dans l'état d'équilibre; en effet, ζ étant une quantité très-petite et la surface libre du liquide en mouvement devant, dans le cas des petites oscillations, différer très-peu de la surface d'équilibre, on ne néglige que des quantités du troisième ordre en remplaçant dans nos intégrales, qui sont du second ordre, une de ces surfaces par l'autre.

De cette discussion résulte pour valeur de la force vive du liquide

$$\sum m v^2 = -2\rho \int dt \int\int g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega + 2\rho^2 \int dt \int\int \frac{d\zeta}{dt} d\omega \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} + \text{const.}$$

L'intégrale relative à t peut être effectuée. On a d'abord

$$2\rho \int dt \int\int g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega = 2\rho \int\int g d\omega \int \zeta \frac{d\zeta}{dt} dt = \rho \int\int g\zeta^2 d\omega,$$

puisque la pesanteur g relative à la surface d'équilibre est indépendante de t.

On a, d'un autre côté,

$$2\rho^2 \int dt \int\int \frac{d\zeta}{dt} d\omega \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} = 2\rho^2 \int\int\int\int \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \zeta' \frac{d\zeta}{dt} dt,$$

puisque les éléments $d\omega$, $d\omega'$ appartiennent à la surface d'équilibre, et sont, par suite, aussi bien que leur distance Δ, indépendants de t. D'ailleurs, Δ ne change pas lorsqu'on permute ces deux éléments l'un dans l'autre : le second membre de l'équation qu'on vient d'écrire peut donc être remplacé par

$$2\rho^2 \int\int\int\int \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \zeta \frac{d\zeta'}{dt} dt,$$

ou encore par la demi-somme

$$\rho^2 \int\int\int\int \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \left(\zeta' \frac{d\zeta}{dt} + \zeta \frac{d\zeta'}{dt}\right) dt,$$

laquelle revient à

$$\rho^2 \int\int\int\int \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta}.$$

Il suit finalement de là que

$$(5) \qquad \sum (m v^2) = \rho^2 \int\int\int\int \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \rho \int\int g\zeta^2 d\omega + \text{const.}$$

Telle est la formule fondamentale dont nous ferons usage dans les questions de stabilité d'équilibre, soit pour une masse liquide placée sur un noyau solide, soit pour une masse entièrement liquide, surtout quand la figure d'équilibre est de révolution. De plus, nous prendrons, en général, pour unité la densité ρ du liquide; en posant ainsi $\rho = 1$, nous aurons

$$(6)\qquad \sum(m\varkappa^2) = \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \iint g\zeta^2 d\omega + \text{const.}$$

6. Considérons maintenant une masse entièrement liquide, dont la figure d'équilibre ne soit pas de révolution, et voyons à quelle forme simple se ramène l'équation (4) lorsqu'on suppose à chaque instant la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ égale à celle de la vitesse angulaire moyenne de la masse liquide, ou, en d'autres termes, telle que l'on ait toujours

$$\iiint (vx - uy)\, dx dy dz = 0.$$

Nous savons que

$$u = \frac{dx}{dt},\quad v = \frac{dy}{dt};$$

le produit $(vx - uy)\, dt$ est donc égal au double de l'aire décrite dans l'instant dt, relativement aux axes mobiles Ox, Oy, par la projection, sur leur plan, du rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point (x, y, z). Soient r cette projection et ψ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x : il nous viendra

$$vx - uy = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\psi}{dt},$$

et, par suite,

$$\iiint r^2 \frac{d\psi}{dt}\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Mais $\theta + \psi$ étant l'angle que r fait avec l'axe fixe Ox', l'intégrale triple

$$\rho\iiint r^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\right) dx\, dy\, dz$$

doit, par le principe des aires, conserver la même valeur pendant toute la durée du mouvement; or, d'après la condition trouvée ci-dessus, le second terme de cette intégrale triple disparaît de lui-même : on peut d'ailleurs, dans le premier terme, faire sortir des signes $\int$ le facteur $\frac{d\theta}{dt}$ qui est une simple fonction de t; c'est donc le produit

$$\rho \frac{d\theta}{dt} \iiint r^2\, dx dy dz$$

de la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ par le moment d'inertie, qui doit avoir une expression constante. En désignant donc par n et G les valeurs de ces deux dernières quantités dans l'état d'équilibre, et par δn, δG les petites variations qu'elles éprouvent dans l'état de mouvement, on aura, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\delta(n\mathrm{G}) = n\delta\mathrm{G} + \mathrm{G}\delta n = 0.$$

En remplaçant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ par sa valeur $n^2 + 2n\delta n$ (je néglige δn^2), et en observant que $x^2 + y^2 = r^2$, la valeur de $\rho\varphi$ donnée au n° 3 deviendra

$$\rho\varphi = \rho\mathrm{V} + \frac{\rho n^2}{2}(x^2 + y^2) - p + \rho n r^2 \delta n = \rho\mathrm{W} - p + \rho n r^2 \delta n,$$

W représentant la quantité

$$\mathrm{V} + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Or, si l'on substitue cette valeur de $\rho\varphi$ dans la formule (4), on se trouvera évidemment conduit à une expression toute semblable à celle que l'on a discutée dans le n° 5 et qui nous a fourni le second membre de l'équation (5); mais on aura, de plus, un terme provenant de $\rho n r^2 \delta n$; ce terme nouveau sera

$$2\rho n \int dt \iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, r^2 \delta n\, d\omega.$$

Occupons-nous successivement des deux parties dont la valeur de $\sum(m\varepsilon^2)$ se trouve ainsi composée.

La première de ces deux parties, savoir

$$2\int dt \iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)(\rho\mathrm{W} - p)\, d\omega,$$

peut d'abord être réduite à

$$2\rho \int dt \iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, \mathrm{W}\, d\omega.$$

car on prouvera, comme au n° 5, que l'intégrale double

$$\int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,p\,d\omega$$

est égale à zéro, du moins en excluant le cas particulier où il se formerait un vide dans l'intérieur de la masse. En regardant ensuite W comme composée d'une partie constante et d'une partie variable, on verra de même qu'on peut faire abstraction de la partie constante. Nous prendrons pour partie constante de W celle qui aurait lieu à la surface de l'ancienne figure d'équilibre solidifiée et soumise ensuite à un mouvement variable de rotation dont la vitesse angulaire serait $\frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire la vitesse moyenne de rotation de notre masse liquide. Si l'on remplaçait cette masse par un tel corps solide, la quantité W ou plutôt $V + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2)$ aurait, en effet, à la surface, une valeur constante pour tous les points et indépendante du temps, la vitesse primitive n d'équilibre y étant conservée ainsi que la valeur de V qui dépend constamment des mêmes molécules réunies pour toujours en un système de forme invariable. La surface du corps solide auxiliaire et fictif que nous venons d'introduire jouissant dès lors dans nos calculs de toutes les propriétés dont jouissait au n° 5 la figure primitive d'équilibre de la masse liquide, nous arriverons ici au même résultat final que dans le n° 5, d'où naîtra, dans l'expression de $\sum (m s^2)$, la quantité suivante :

$$\rho^2 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\zeta\zeta'\,d\omega\,d\omega'}{\Delta} - \rho \int\!\!\int g\zeta^2\,d\omega,$$

$d\omega$ étant à volonté ou l'élément de la surface libre du liquide, ou, ce qui est plus simple et tout aussi exact au degré d'approximation propre à nos formules, l'élément de la surface solide auxiliaire, et ζ représentant pour chaque élément de cette surface solide la hauteur positive ou négative du liquide qui la recouvre dans l'état de mouvement, tandis que g exprime la pesanteur dans l'état d'équilibre où la vitesse constante de rotation était n.

Quant au terme

$$2\rho n \int dt \int\!\!\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, r^2\,\delta n\,d\omega,$$

où l'on peut également regarder l'élément $d\omega$ comme appartenant à la surface solide auxiliaire, il devient $\left(\text{à cause de } \frac{d\zeta}{dt} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)$,

$$2\rho n \int dt \int\int \frac{d\zeta}{dt} r^2 \delta n d\omega;$$

δn est une simple fonction de t, et les limites de l'intégrale $\int\int \zeta r^2 d\omega$, qui s'étend à toute la surface solide auxiliaire, sont indépendantes du temps; le terme en question peut donc s'écrire

$$2\rho n \int \delta n dt \frac{d}{dt} \int\int \zeta r^2 d\omega, \quad \text{ou} \quad 2n \int \delta n \frac{d\delta G}{dt} dt,$$

puisque $\rho \int\int \zeta r^2 d\omega$ ne diffère pas de la variation δG que le moment d'inertie éprouve dans l'état de mouvement. D'un autre côté, on a

$$\delta n = -\frac{n}{G}\delta G;$$

il vient donc

$$2n \int \delta n \frac{d\delta G}{dt} dt = -2\frac{n^2}{G} \int \delta G \frac{d\delta G}{dt} dt = -\frac{n^2}{G}(\delta G)^2.$$

Le dernier terme de l'expression de $\sum(mz^2)$ est ainsi

$$-\frac{n^2}{G}(\delta G)^2 \quad \text{ou} \quad -\frac{\rho^2 n^2}{G}\left(\int\int \zeta r^2 d\omega\right)^2.$$

De là résulte finalement

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum(mz^2) &= \rho^2 \int\int\int\int \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} - \rho \int\int g\zeta^2 d\omega \\ &\quad - \frac{\rho^2 n^2}{G}\left(\int\int \zeta r^2 d\omega\right)^2 + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

et si l'on fait $\rho = 1$,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum(mz^2) &= \int\int\int\int \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} - \int\int g\zeta^2 d\omega \\ &\quad - \frac{n^2}{G}\left(\int\int \zeta r^2 d\omega\right)^2 + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

On peut observer que les formules (5) et (7), ou (6) et (8) ne dépendent que de quantités relatives à la surface; les vitesses u, v, w relatives aux points de l'intérieur en ont disparu complétement. On arriverait au reste à ces formules, en appliquant directement aux fluides incompressibles le principe des vitesses virtuelles combiné avec le principe de d'Alembert, puis passant de là au principe des forces vives, en remplaçant les vitesses virtuelles par les vitesses effectives. Mais la marche que nous avons suivie paraît préférable.

7. Revenons maintenant aux équations (2), ou plutôt à celles qu'on en déduit en posant

$$\rho V + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - p = \rho\varphi,$$

lesquelles, en négligeant des termes très-petits du second ordre, peuvent s'écrire

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{dy} - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Quelle que soit la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, on peut la représenter par $n+\delta n$, n étant une constante et δn une quantité de l'ordre des perturbations. On embrassera ainsi dans un même calcul les deux hypothèses distinctes des n^{os} 5 et 6. Pour exprimer, par exemple, qu'on adopte la première de ces deux hypothèses, il suffira de faire dans nos formules finales $\delta n = 0$. En négligeant les termes du second ordre δn^2, $2v\delta n$, $2u\delta n$, nous aurons

$$\rho\varphi = \rho V + \frac{\rho n^2}{2}(x^2+y^2) - p + \rho nr^2\delta n,$$

où $r^2 = x^2+y^2$, et

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx} + 2nv + y\frac{d\delta n}{dt},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy} - 2nu - x\frac{d\delta n}{dt},\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{d\varphi}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (9) par rapport à x, y, z respectivement, puis ajoutons, et rappelons-nous que

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Il nous viendra

$$0=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+2n\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right);$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+2n\left(\frac{d^3v}{dx\,dt^2}-\frac{d^3u}{dy\,dt^2}\right)=0.$$

Mais, en différentiant la deuxième des équations (9) par rapport à x, et la première par rapport à y, puis retranchant, on a

$$\frac{d^2v}{dx\,dt}-\frac{d^2u}{dy\,dt}=-2n\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)-2\frac{d\delta n}{dt}=2n\frac{dw}{dz}-2\frac{d\delta n}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d^3v}{dx\,dt^2}-\frac{d^3u}{dy\,dt^2}=2n\frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dt}\right)-2\frac{d^2\delta n}{dt^2}=2n\frac{d^2\varphi}{dz^2}-2\frac{d^2\delta n}{dt^2},$$

en vertu de la dernière des équations (9). On est ainsi conduit à l'équation remarquable

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+4n^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}=4n\frac{d^2\delta n}{dt^2}. \tag{10}$$

L'équation

$$\rho\varphi=\rho V+\frac{\rho n^2}{2}(x^2+y^2)-p+\rho n r^2\delta n,$$

appliquée à la surface libre du liquide, fournit encore un résultat simple, qu'il faut indiquer, ou plutôt rappeler; car on l'a déjà obtenu plus haut. Le long de cette surface libre, la pression p est constante. Quant à la quantité

$$V+\frac{n^2}{2}(x^2+y^2),$$

c'est celle que nous avons représentée par W au n° 5 et au n° 6, où l'on a vu qu'elle se compose d'une partie constante et d'une partie variable, qui est

$$\rho\iint\frac{\zeta'\,d\omega'}{\Delta}-g\zeta,$$

ζ, g, Δ ayant la signification indiquée aux numéros cités. Ainsi, à la surface libre, on a

$$(11)\qquad \varphi = \rho \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + nr^2 \delta n + \text{const.},$$

ou, si l'on prend $\rho = 1$,

$$(12)\qquad \varphi = \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + nr^2 \delta n + \text{const.}$$

Pour plus de simplicité, on pourra d'ailleurs appliquer cette équation à la surface primitive d'équilibre, solidifiée et animée de la vitesse de rotation $n + \delta n$; car cette surface ne diffère que très-peu de la surface libre en mouvement, tant que les quantités ζ restent très-petites.

On se souvient aussi que l'on a trouvé, en considérant la composante de la vitesse suivant la normale à l'élément $d\omega$,

$$(13)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma.$$

Ces conditions définies relatives à la surface et celle qui exprime que, dans le cas d'un noyau solide, les molécules liquides ne peuvent que glisser sur le noyau, doivent être jointes aux équations indéfinies (9) et (10). Réunies aux conditions de l'état initial, elles déterminent les arbitraires qu'introduit l'intégration des équations indéfinies. Il ne faut pas non plus oublier que ζ doit toujours vérifier l'équation

$$\int\int \zeta d\omega = 0,$$

puisque le volume total du liquide est invariable. Enfin, s'il s'agit d'un système entièrement fluide et sans noyau intérieur, il faut placer l'origine O des coordonnées au centre de gravité de ce système, et dès lors on doit avoir

$$\int\int x\zeta d\omega = 0, \qquad \int\int y\zeta d\omega = 0, \qquad \int\int z\zeta d\omega = 0.$$

Est-il nécessaire de faire observer que quelques-unes des formules précédentes se simplifient quand on pose $\delta n = 0$? Les équations (9) et (10) se réduisent alors à

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx} + 2nv,\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy} - 2nu,\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{d\varphi}{dz}, \end{aligned}\right.$$

et

$$(15)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + 4n^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Quant à l'équation (11), elle devient

$$(16)\qquad \varphi = \rho\iint\frac{\zeta'\,d\omega'}{\Delta} - g\zeta + \text{const.},$$

et plus simplement encore

$$(17)\qquad \varphi = \iint\frac{\zeta'\,d\omega'}{\Delta} - g\zeta + \text{const.},$$

en prenant $\rho = 1$.

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. EDMOND BOUR,
Élève Ingénieur des Mines.

(Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie des sciences le 5 mars 1855.)

Les équations différentielles des problèmes de mécanique ont été mises par Lagrange, par Poisson, et finalement par M. Hamilton, sous des formes remarquables, qui ont fourni aux géomètres un des sujets d'étude les plus intéressants et les plus féconds. Les travaux auxquels cette étude a donné lieu, en particulier ceux de Jacobi, ont été exposés avec une rare netteté par M. Bertrand dans son Cours du Collége de France (année 1852-53); ils se trouvent résumés dans les Notes placées à la suite de la *Mécanique analytique*, et forment le complément essentiel de ce bel ouvrage [*]. Je me contenterai de rappeler en quelques mots les résultats qui ont servi de point de départ à mes recherches, ne pouvant mieux faire que de renvoyer pour tous les détails aux Notes déjà citées.

§ Ier.

Soit un problème de mécanique quelconque auquel s'applique le principe des forces vives. Si je suppose, avec Lagrange, qu'on ait profité des équations de liaison pour exprimer les coordonnées des divers points mobiles en fonction du plus petit nombre possible d'inconnues,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_n,$$

lesquelles seront alors absolument indépendantes, les équations dif-

[*] *Mécanique analytique*; troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand; tome I, Notes VI et VII.

férentielles du mouvement seront de la forme [*] :

$$(a)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq'_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = \frac{dU}{dq_i}.$$

U est la fonction des forces et T la demi-somme des forces vives du système.

Posons maintenant

$$\frac{dT}{dq'_i} = p_i, \quad U - T = H,$$

et substituons les variables p_i aux dérivées q'_i; les équations précédentes prennent la forme très-simple due à M. Hamilton [**] :

$$(b)\qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{dH}{dq_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{dH}{dp_i}.$$

L'intégration de ces équations au nombre de $2n$ donnera l'expression des inconnues $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ en fonction du temps et de $2n$ constantes arbitraires. On peut aussi supposer les équations intégrales résolues par rapport aux constantes; et c'est sous cette forme que je les emploierai dans ce qui va suivre, en les désignant, pour abréger, par les constantes qui y figurent, mises entre parenthèses.

Ces intégrales présentent plusieurs propriétés importantes, parmi lesquelles il faut citer en première ligne la suivante, découverte par Poisson :

Théorème fondamental. — *Si*

$$\alpha = \varphi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$
$$\beta = \psi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t),$$

sont deux intégrales d'un même problème, la quantité

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right),$$

que l'on désigne par (α, β), *restera constante pendant toute la durée du mouvement.*

---

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 411.

[**] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 413.

La manière la plus directe de démontrer ce théorème célèbre consiste à vérifier que

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dt} = 0.$$

Les calculs n'offrent aujourd'hui aucune difficulté [*].

Jacobi a fondé sur ce théorème une méthode d'intégration remarquable. En effet, (α, β) est une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; si donc on l'égale à une constante arbitraire, on aura en général une nouvelle intégrale du problème, sans même effectuer de quadrature. Celle-ci peut d'ailleurs servir, combinée avec l'une des deux premières, à en donner une quatrième, et ainsi de suite.

Malheureusement cette méthode tombe souvent en défaut. C'est ce qui arrivera, par exemple, si (α, β), au lieu d'être fonction des variables, est égale à zéro ou à une constante numérique : ainsi, quand l'intégrale (β) ne contient pas t, et que l'intégrale (α) est celle des forces vives, $\alpha = H$, on a identiquement $(\alpha, \beta) = 0$, en vertu de l'équation même qui définit les intégrales. Il peut se faire aussi que (α, β) se réduise à une constante au moyen des intégrales déjà connues, et alors on n'apprend rien de nouveau. Ces divers cas d'exceptions nuisent beaucoup à l'emploi de la méthode d'intégration indiquée ci-dessus. Mais *quand ils ont lieu, les intégrales* (α) *et* (β) *jouissent de propriétés particulières dont on peut* souvent *tirer un autre profit pour l'intégration des équations dynamiques proposées.* J'emprunte les expressions mêmes de Jacobi dans une lettre adressée en 1840 au Président de l'Académie des Sciences (*voir* le tome V du présent Journal, page 350). Cette idée (que l'illustre géomètre devait développer dans un ouvrage auquel il a longtemps travaillé, mais que la mort l'a empêché de faire paraître, et qui jusqu'ici est resté inédit) est une des bases de mon Mémoire.

Je m'appuierai encore sur un beau travail de M. Bertrand, relatif à ces mêmes cas d'exception, et en particulier sur le théorème que voici [**] :

Théorème. — *Etant donnée une intégrale* (λ) *autre que celle des*

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 423.

[**] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 426.

forces vives, et que je suppose indépendante du temps, on peut compléter la solution au moyen :

1°. *De $2n-2$ intégrales comprenant (λ), qui sont indépendantes du temps et qui donnent $(\lambda, \mu) = 0$, (μ) étant une quelconque d'entre elles ;*

2°. *D'une autre (ν), également indépendante du temps, mais telle que $(\lambda, \nu) = 1$;*

3°. *Enfin, d'une dernière intégrale (ρ) de la forme*

$$\rho = \varphi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n) - t,$$

et qui donne encore $(\lambda, \rho) = 0$.

Deux intégrales (λ) et (ν), pour lesquelles on a $(\lambda, \nu) = 1$, et par conséquent $(\nu, \lambda) = -1$, sont dites intégrales conjuguées. Celle qui contient le temps est la conjuguée de celle des forces vives. La solution complète d'un problème de mécanique peut donc être formée de $2n$ intégrales du genre que voici : celle des forces vives $\alpha = \mathrm{H}$; celle qui contient le temps, que j'écrirai $\beta = \mathrm{G} - t$; enfin $(2n-2)$ autres, indépendantes de t, que je désignerai par $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{2n-2})$: (α_1) est une intégrale quelconque indépendante du temps, autre que celle des forces vives; et, d'après le théorème de M. Bertrand, on peut supposer que l'on ait $(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$ pour tout indice i différent de 2, enfin $(\alpha_1, \mathrm{G}) = 0$.

Les intégrales $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_{2n-2})$ vérifient l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i} \frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\mathrm{H}}{dp_i} \frac{d\zeta}{dq_i} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad (\mathrm{H}, \zeta) = 0,$$

qui est aussi satisfaite par $\zeta = \mathrm{H}$, et dont la solution la plus générale est

$$\zeta = \mathrm{f}(\mathrm{H}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}).$$

Au contraire, le premier membre de l'équation (1) se réduirait à l'unité si l'on posait $\zeta = \mathrm{G}$: en d'autres termes $(\mathrm{H}, \mathrm{G}) = 1$. L'équation linéaire (1) peut remplacer les équations différentielles (b) : c'est à elle qu'on peut supposer appliqués les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand, et c'est elle que j'étudie dans ce Mémoire, en montrant comment on peut en abaisser l'ordre, quand on connaît une ou plusieurs intégrales.

§ II.

Et d'abord, je puis profiter de l'intégrale $\alpha = H$, qui est connue, pour éliminer l'une des inconnues, p_n par exemple. Une fonction F de $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n$ se changera en une fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_{n-1}, q_{n-1}, q_n$, H, et l'on aura pour sa nouvelle dérivée par rapport à p_i, que je distingue au moyen d'un accent,

$$\frac{d'F}{dp_i} = \frac{dF}{dp_i} + \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i};$$

d'ailleurs

$$\frac{dp_n}{dp_i} = -\frac{\dfrac{dH}{dp_i}}{\dfrac{dH}{dp_n}};$$

donc

$$\frac{dF}{dp_i} = \frac{d'F}{dp_i} - \frac{dF}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i} = \frac{d'F}{dp_i} + \frac{dF}{dp_n}\frac{\dfrac{dH}{dp_i}}{\dfrac{dH}{dp_n}}.$$

Je calcule ainsi toutes les dérivées de ζ pour les substituer dans l'équation (1); les termes qui contiennent $\frac{d\zeta}{dp_n}$ se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{dH}{dq_1}\frac{d'\zeta}{dp_1} - \frac{dH}{dp_1}\frac{d'\zeta}{dq_1} + \ldots - \frac{dH}{dp_n}\frac{d'\zeta}{dq_n} = 0.$$

Divisant par $-\frac{dH}{dp_n}$ et supprimant les accents, il vient

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dqi}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

En appliquant les mêmes calculs à l'équation $(H, G) = 1$, elle devient

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}.$$

L'équation (2) a les mêmes intégrales que l'équation (1), à l'exception de celle des forces vives $\alpha = H$; c'est elle qu'il faudrait chercher à intégrer si l'intégrale (α) était seule connue.

Supposons maintenant qu'on ait en outre l'intégrale (α_1); si j'exprime qu'une fonction

$$\zeta = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$$

donne identiquement $(\alpha_1, \zeta) = 0$, j'obtiendrai une équation linéaire de même forme que l'équation (1)

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) = 0,$$

et cette équation, d'après ce que j'ai supposé plus haut, sera vérifiée quand on y remplacera ζ par H, G, α_1, α_3, $\alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$, mais non pas par (α_2) qui donne

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 1.$$

Cela posé, je puis faire subir à l'équation (4) la même transformation qu'à l'équation (1), puisqu'elle est aussi satisfaite par $\zeta = \mathrm{H}$; et il arrivera, ce qui fait le succès de ma méthode, que cette opération, qui a pour but d'enlever la solution connue $\zeta = \mathrm{H}$, conduira à deux équations différentes suivant que ζ sera égale à G ou à l'une quelconque des autres intégrales de l'équation (4); de manière qu'en prenant la deuxième forme, on aura aussi éliminé l'intégrale inconnue $\zeta = \mathrm{G}$ qui seule est étrangère à l'équation (1).

Je développe les calculs qui conduisent à ce résultat fondamental.

Il s'agit de substituer dans l'équation

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) = 0,$$

les valeurs des anciennes dérivées en fonction des nouvelles,

$$\frac{d\alpha_1}{dq_i} = \frac{d'\alpha_1}{dq_i} - \frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i},$$

$$\frac{d\zeta}{dp_i} = \frac{d'\zeta}{dp_i} - \frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i};$$

ce qui donnera quatre séries de termes :

1°. Ceux qui proviennent des premiers termes,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{d'\alpha_1}{dq_i}\frac{d'\zeta}{dp_i} - \frac{d'\alpha_1}{dp_i}\frac{d'\zeta}{dq_i}\right);$$

2°. La somme des produits des derniers termes,

$$\sum\left(\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_n}\frac{dp_n}{dp_i}\right):$$

ces produits se détruisent tous deux à deux;

3°. Ceux qui contiennent en facteur $\frac{d\zeta}{dp_n}$,

$$\frac{d\zeta}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\alpha_1}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\alpha_1}{dq_i}\right)+\frac{d'\alpha_1}{dq_n}\right]:$$

ils forment une somme nulle, car α_1 vérifie l'équation (2);

4°. Enfin, ceux qui multiplient $\frac{d\alpha_1}{dp_n}$,

$$-\frac{d\alpha_1}{dp_n}\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d'\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d'\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d'\zeta}{dq_n}\right].$$

Cette quantité est nulle également en vertu de l'équation (2), si ζ représente α_1, ou $\alpha_3,\ldots$, ou α_{2n-2}; mais cette même quantité, si $\zeta=G$, prend, en vertu de l'équation (3), la valeur

$$\frac{d\alpha_1}{dp_n}\frac{dp_n}{dH}=\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

On arrive ainsi, comme je l'ai annoncé, aux deux équations

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)=0,$$

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)=-\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

On trouverait de même que α_2 satisfait à l'équation

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{d\alpha_1}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{d\alpha_1}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)=1.$$

L'équation (5) est entièrement semblable à l'équation (1), et jouit des mêmes propriétés. Sa solution complète est formée des fonctions $\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-2}$, qui toutes sont des intégrales du problème et donnent $(\alpha_1, \alpha_i)=0$. Enfin, les théorèmes de Poisson et de M. Bertrand s'y appliquent évidemment : seulement la fonction (α, β) a maintenant deux termes de moins.

Soit donc (α_3) une de ses intégrales : on peut concevoir, d'après le dernier des théorèmes cités, qu'on en complète la solution au moyen de (α_1) d'abord, et d'intégrales $(\alpha_4), (\alpha_5), \ldots, (\alpha_{2n-2})$, telles que, pour tout indice i différent de 4, on ait $(\alpha_3, \alpha_i) = 0$, tandis que $(\alpha_3, \alpha_4) = 1$. Elles donnent toutes d'ailleurs $(\alpha_1, \alpha_i) = 0$, puisqu'elles satisfont à l'équation (4).

J'en conclus que si l'on me donne l'intégrale (α_3), je pourrai, en opérant comme précédemment, tirer de l'équation

$$\alpha_1 = \varphi(\mathrm{H}, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

la valeur de p_{n-1} pour la substituer dans la quantité α_3, et calculer ensuite les coefficients de l'équation

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{d\alpha_3}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{d\alpha_3}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad (\alpha_3, \zeta) = 0,$$

qui aura la même forme que les équations (1) et (5) et admettra pour intégrales $(\alpha_3), (\alpha_5), (\alpha_6), \ldots, (\alpha_{2n-2})$.

Je puis supposer, au moins en théorie, que j'obtienne une série d'équations analogues aux équations (1), (5) et (8), le nombre des termes décroissant à chaque fois de deux unités. Le théorème de M. Bertrand s'applique à chacune de mes équations successives, et j'arriverai de proche en proche à mettre la solution complète du problème sous la forme *canonique* de $2n$ intégrales conjuguées deux à deux,

$$\begin{matrix} (a_1), & (a_2), \ldots, & (a_n), \\ (b_1), & (b_2), \ldots, & (b_n), \end{matrix}$$

telles que l'on ait

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, a_{i'}) = 0, \quad (a_i, b_{i'}) = 0.$$

On peut voir dans le travail de M. Bertrand [*] comment on doit transformer les intégrales du problème, telles qu'elles sont immédiatement données, pour obtenir des solutions de mes équations (1), (5), (8),.... Je ferai seulement remarquer que, lorsqu'on a déjà fait usage d'une intégrale (α_i), la connaissance de sa conjuguée ne peut être d'aucune utilité pour un abaissement ultérieur, car celle-ci est devenue étrangère à l'équation réduite.

[*] *Mécanique analytique*, tome Ier, page 427.

§ III.

Je viens de montrer comment on peut abaisser l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème au moyen des intégrales qui sont connues; cette ressource épuisée, je vais indiquer la marche à suivre pour essayer de continuer l'intégration.

Si, par exemple, on ne connaît pas d'intégrale autre que (α_1), on appliquera à l'équation (5) la méthode qui a donné l'équation (2), c'est-à-dire que l'on éliminera p_{n-1} au moyen de α_1; on transformera de même les équations (6) et (7), et il viendra

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0,$$

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right)+\frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1},$$

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

Mais je dis que l'on a

$$\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}=-\frac{dp_{n-1}}{dH};$$

en effet, on a tiré de l'équation $\alpha_1=\varphi(H, p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}, q_1, q_2,\ldots, q_n)$

$$p_{n-1}=f(\alpha_1, H;\ p_1, p_2,\ldots, p_{n-2};\ q_1, q_2,\ldots, q_n):$$

si l'on remet dans le deuxième membre de cette équation la valeur de α_1 en fonction des variables p et q et de H, elle sera identiquement vérifiée; et cette identité, différentiée par rapport à H, donne précisément

$$0=\frac{dp_{n-1}}{dH}+\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dH}.$$

L'équation (11) peut donc être remplacée par

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{dG}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right)+\frac{dG}{dq_{n-1}}=-\frac{dp_{n-1}}{dH}.$$

Je puis encore transformer les équations (2) et (3), en remplaçant la variable p_{n-1} par α_1, et l'équation (2) va de même en fournir deux différentes selon que ζ sera α_2 ou l'une quelconque des autres quantités $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$. On obtient ainsi trois équations analogues à (9), (10), (12), avec cette différence que p_n et q_n ont pris la place de p_{n-1} et q_{n-1} :

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\alpha_2}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\alpha_2}{dq_i}\right) + \frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1},$$

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{dG}{dp_i} - \frac{dp_n}{dp_i}\frac{dG}{dq_i}\right) + \frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}.$$

Les équations (9) et (13) admettent toutes deux pour intégrales (α_3), $(\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$; ces fonctions, étant au nombre de $2n-4$, forment la solution complète de chacune d'elles; et toutes sont des intégrales du problème. Pourtant, comme q_n est considérée comme une constante dans l'intégration de l'équation (9), et q_{n-1} dans celle de (13), il s'ensuit qu'une intégrale de la première par exemple ne satisfait pas nécessairement au problème.

En effet, supposons qu'on connaisse $(\alpha_3), (\alpha_4), \ldots, (\alpha_{2n-2})$, intégrales du problème et partant de l'équation (9). Si l'on pose :

$$\zeta = \Phi(\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}, q_n),$$

Φ désignant une fonction arbitraire, ζ ne sera plus une intégrale du problème et continuera de vérifier l'équation (9).

Ceci prouve qu'on ne peut pas substituer purement et simplement les équations (9) et (13) à (2), car les premières admettent des solutions étrangères au problème, bien qu'on en puisse former l'intégrale générale uniquement avec les intégrales des équations (1) et (2). Le paragraphe suivant est consacré à montrer comment on doit traiter ces deux équations.

§ IV.

Commençons par résumer, en le dégageant des calculs, ce que j'ai déjà dit sur la marche à suivre pour la solution du problème de mécanique proposé.

Je suppose que l'on connaisse deux intégrales qui comprennent celle des forces vives :

$$H = f(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n),$$
$$\alpha_1 = f_1(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n).$$

Je résous ces deux équations par rapport à p_n et p_{n-1}; je calcule les coefficients des deux suivantes :

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_{n-1}}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_{n-1}}=0,$$

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-2}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\frac{d\zeta}{dp_i}-\frac{dp_n}{dp_i}\frac{d\zeta}{dq_i}\right)+\frac{d\zeta}{dq_n}=0,$$

et je cherche à intégrer l'une ou l'autre de ces équations.

Soit ζ_1 une intégrale de l'équation (9); je la substitue dans le premier membre de l'équation (13), et, si elle le rend identiquement nul, c'est une intégrale du problème. Dans le cas contraire, soit Z_1 le résultat de la substitution; je dis que $Z_1 =$ constante est une nouvelle intégrale de l'équation (9). La vérification directe de ce fait n'offre aucune difficulté, mais la démonstration suivante suffit.

D'après la théorie des équations différentielles partielles linéaires, ζ_1 doit être de la forme

$$\zeta_1 = \Phi(\alpha_3,\ \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2},\ q_n).$$

En portant cette valeur dans l'équation (13), comme α_3, $\alpha_4, \ldots$, α_{2n-2}, donnent des résultats nuls, et que q_n donne l'unité, on a

$$Z_1 = \frac{d\zeta_1}{dq_n}.$$

Mais $\frac{d\zeta_1}{dq_n}$ est comme ζ_1 une fonction de α_3, $\alpha_4, \ldots$, α_{2n-2}, q_n, et par conséquent, c'est une intégrale de l'équation (9).

Cette intégrale, à son tour, va m'en donner de nouvelles, tant par sa substitution dans l'équation (13) que par sa combinaison avec ζ_1 pour former la fonction (ζ_1, Z_1) de Poisson; et j'obtiendrai ainsi un certain nombre d'intégrales distinctes, limité au plus tard quand elles formeront la solution complète de l'équation (9). Je puis considérer ces intégrales comme formant un système canonique partiel :

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, \ldots, a_k, \\ b_1, & b_2, \ldots, b_k, \end{matrix}$$

en entendant simplement par là que l'on a, pour des indices quelconques de 1 à k,

$$(a_i, b_i) = 1, \quad (a_i, b_{i'}) = 0, \quad (a_i, a_{i'}) = 0,$$

k pouvant d'ailleurs être égal ou inférieur à $n - 2$.

Les résultats $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$, qu'on obtient en faisant successivement, dans l'équation (13), $\zeta = a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, sont des fonctions de ces quantités seulement et de q_n, sans quoi ils fourniraient de nouvelles intégrales de l'équation (9).

Cela posé, il existe $2k$ intégrales du problème, qui sont fonction des variables a et b et de q_n; en effet, substituant dans l'équation (13)

$$\zeta = \varphi(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k, q_n),$$

et exprimant que le résultat est nul, il vient

$$(16) \qquad A_1 \frac{d\zeta}{da_1} + B_1 \frac{d\zeta}{db_1} + \cdots + A_k \frac{d\zeta}{da_k} + B_k \frac{d\zeta}{db_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

équation différentielle partielle qui admet $2k$ intégrales.

Or il est très-remarquable que cette équation a précisément la même forme que les équations (2), (9) et (13), c'est-à-dire que

$$A_i = \frac{dL}{db_i}, \quad B_i = -\frac{dL}{da_i}.$$

Pour le faire voir, il suffit de prouver que

$$\frac{dA_1}{db_2} = \frac{dA_2}{db_1}.$$

Différentions par rapport à q_n l'équation

$$(a_1, a_2) = 0;$$

il vient

$$(17) \qquad \sum \left(\frac{da_1}{dq_i} \frac{d^2 a_2}{dq_n\, dp_i} - \frac{da_1}{dp_i} \frac{d^2 a_2}{dq_n\, dq_i} \right) = \sum \left(\frac{da_2}{dq_i} \frac{d^2 a_1}{dq_n\, dp_i} - \frac{da_2}{dp_i} \frac{d^2 a_1}{dq_n\, dq_i} \right).$$

Mais A_1 est défini par l'équation

$$\frac{dp_n}{dq_1} \frac{da_1}{dp_1} - \frac{dp_n}{dp_1} \frac{da_1}{dq_1} + \ldots + \frac{da_1}{dq_n} = A_1;$$

si je la différentie par rapport à p_i et q_i, j'en tire

$$\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dp_i} = \frac{dA_1}{dp_i} - \frac{dp_n}{dq_1} \frac{d^2 a_1}{dp_1\, dp_i} + \frac{dp_n}{dp_1} \frac{d^2 a_1}{dq_1\, dp_i} - \ldots - \frac{da_1}{dp_1} \frac{d^2 p_n}{dq_1\, dp_i} + \frac{da_1}{dq_1} \frac{d^2 p_n}{dp_1\, dp_i}, \cdots,$$

$$\frac{d^2 a_1}{dq_n\, dq_i} = \frac{dA_1}{dq_i} - \frac{dp_n}{dq_1} \frac{d^2 a_1}{dp_1\, dq_i} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{da_1}{dp_1} \frac{d^2 p_1}{dq_1\, dq_i} + \frac{da_1}{dq_1} \frac{d^2 p_n}{dq_n dq_i}, \cdots.$$

J'aurais des formules analogues pour $\frac{d^2 a_2}{dq_n dp_i}$, $\frac{d^2 a}{dq_n dq_i}$.

Je substitue toutes ces valeurs dans l'équation (17), et je dis qu'elle se réduit à

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

C'est ce que l'on obtient en remplaçant simplement $\frac{d^2 a_1}{dq_n dp_i}$, $\frac{d^2 a_1}{dq_n dq_i}$, etc., par les premiers termes de leurs expressions $\frac{dA_1}{dp_i}$, $\frac{dA_1}{dq_i}$, etc., et je vais faire voir que tous les autres termes se détruisent.

Prenons d'abord ce qui multiplie l'une quelconque des dérivées secondes de p_n, par exemple $\frac{d^2 p_n}{dp_1 dq_1}$. On trouve, dans le premier membre,

$$-\frac{da_1}{dq_1}\frac{da_2}{dp_1} - \frac{da_2}{dq_1}\frac{da_1}{dp_1},$$

et dans le deuxième membre les mêmes termes avec les mêmes signes.

Passons aux dérivées premières. Les termes qui multiplient $\frac{dp_n}{dq_1}$ sont, en les faisant tous passer dans le deuxième membre,

$$\sum\left(\frac{da_1}{dq_i}\frac{d^2 a_2}{dp_i\, dp_1} + \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2 a_1}{dq_i\, dp_1} - \frac{da_1}{dp_i}\frac{d^2 a_1}{dq_i\, dp_1} - \frac{da_2}{dq_i}\frac{d^2 a_1}{dp_i\, dp_1}\right).$$

Ils forment précisément la dérivée de (a_1, a_2) par rapport à p_1; leur somme est donc nulle, puisque (a_1, a_2) est identiquement zéro. Donc

$$(a_1, A_2) = (a_2, A_1).$$

Mais A_2 est une fonction de $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ et de q_n; donc, en vertu de la forme linéaire de la fonction de Poisson,

$$(a_1, A_2) = \frac{dA_2}{da_1}(a_1, a_1) + \frac{dA_2}{db_1}(a_1, b_1) + \ldots = \frac{dA_2}{db_1},$$

car toutes les parenthèses sont nulles, sauf (a_1, b_1), qui est l'unité.

On aurait de même

$$(a_2, A_1) = \frac{dA_1}{db_2}.$$

Donc

$$\frac{dA_2}{db_1} = \frac{dA_1}{db_2}.$$

On trouverait, par un calcul analogue,

$$\frac{dA_1}{da_1} = -\frac{dB_1}{db_1};$$

le signe — s'introduisant parce que, si $(a_1, b_1) = 1$, $(b_1, a_1) = -1$ [*].

Le théorème se trouve ainsi démontré, et l'équation (16) prend la forme

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{dL}{db_i}\frac{d\zeta}{da_i} - \frac{dL}{da_i}\frac{d\zeta}{db_i}\right) + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0. \tag{18}$$

Cette équation n'admet plus d'intégrale étrangère au problème; elle est au plus du même ordre que les équations (9) et (13), et peut être d'un ordre bien inférieur, suivant la grandeur de k, c'est-à-dire que souvent l'intégrale ζ_1, étrangère au problème, permettra d'abaisser son degré en divisant les intégrales inconnues en plusieurs groupes donnés par des équations distinctes, ce qui est bien dans la nature des problèmes ordinaires de mécanique. C'est à cette équation (18) que je suis ramené en définitive.

J'ai admis que les variables a et b formaient un système canonique, mais ce système peut être incomplet : si la variable a_k, par exemple, n'avait pas de conjuguée, c'est-à-dire si l'on s'était trouvé arrêté avant d'avoir b_k, on aurait toujours

$$(a_k, a_i) = 0, \quad (a_k, b_i) = 0,$$

on en déduirait, par les calculs qui précèdent,

$$\frac{dA_k}{da_i} = 0, \quad \frac{dA_k}{db_i} = 0,$$

c'est-à-dire que A_k serait une fonction de a_k et de q_n seulement; l'équation (18) deviendrait

$$\sum_{i=1}^{i=k-1}\left(\frac{dL}{db_i}\frac{d\zeta}{da_i} - \frac{dL}{da_i}\frac{d\zeta}{db_i}\right) + A_k\frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0,$$

et on en aurait une intégrale en résolvant l'équation du premier ordre

$$A_k\frac{d\zeta}{da_k} + \frac{d\zeta}{dq_n} = 0.$$

---

[*] Des considérations analogues m'ont fait découvrir le théorème suivant, qui,

§ V.

Quand on aura la moitié de la solution d'un problème de mécanique, les équations telles que (9) et (13) deviendront illusoires ; il ne restera plus à trouver que des intégrales conjuguées qui seront données par les équations (3), (10), (12), (14), (15), etc., qui se réduisent à

$$\frac{d\alpha_2}{dq_n} = -\frac{dp_n}{d\alpha_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{d\alpha_1}, \ldots,$$
$$\frac{dG}{dq_n} = -\frac{dp_n}{dH}, \quad \frac{dG}{dq_{n-1}} = -\frac{dp_{n-1}}{dH}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si donc on pose

$$V = \int p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \ldots + p_n\, dq_n,$$

on aura

$$\alpha_2 = -\frac{dV}{d\alpha_1}, \quad \alpha_4 = -\frac{dV}{d\alpha_3}, \quad \ldots, \quad G = -\frac{dV}{dH}.$$

---

appliqué au problème des trois corps, m'a conduit à des conséquences remarquables développées dans un Mémoire spécial.

Si l'on a trouvé 2k fonctions des variables p et q (k étant plus petit que n, ou égal à n)

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_k,$$
$$b_1, \quad b_2, \ldots, \quad b_k,$$

formant un système canonique, et telles que H *s'exprime en fonction de ces quantités seulement ; elles satisfont à des équations différentielles de la forme*

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i}, \quad \frac{db_i}{dt} = \frac{dH}{da_i}.$$

En effet,

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{da_i}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \frac{da_i}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{da_i}{dp_2}\frac{dH}{dq_2} - \ldots = (H, a_i);$$

mais H étant une fonction des variables a et b, on a, comme dans le calcul précédent,

$$(H, a_i) = -\frac{dH}{db_i}:$$

d'où

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{dH}{db_i};$$

ce qui démontre le théorème.

Ce dernier théorème est dû à Poisson ou à Jacobi; mais aucun de ces deux géomètres n'avait fait connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \ldots + p_n dq_n$$

soit une différentielle exacte, ce qui est indispensable pour l'application du théorème. M. Liouville a fait voir qu'il fallait que toutes les combinaisons (α, β) des intégrales trouvées fussent nulles; ce qui s'accorde bien avec toute la théorie précédente.

Dans ce qui précède, j'ai supposé que le principe des forces vives était applicable, c'est-à-dire que la quantité H des équations (b) ne contenait pas le temps explicitement. M. Liouville m'a fait remarquer que la théorie s'étendait tout naturellement au cas où, sans se préoccuper des applications à la dynamique, on considère simplement les équations différentielles (b), H étant fonction de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t$; l'ensemble du travail devient même ainsi plus complet et plus satisfaisant.

En effet, l'équation qui exprime que la dérivée complète d'une quantité α par rapport à t est nulle, est, dans ce cas,

$$\sum \left(\frac{d\mathrm{H}}{dq_i} \frac{d\alpha}{dp_i} - \frac{d\mathrm{H}}{dp_i} \frac{d\alpha}{dq_i} \right) + \frac{d\alpha}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire qu'elle a précisément la même forme que les équations (2), (9), (13) et (18); toutes les équations sont ramenées à un type uniforme; H et t jouent le même rôle que deux variables conjuguées p_i et q_i. Si H est indépendant de t, le problème admet pour intégrale $\mathrm{H} =$ constante, de même qu'il admettrait $p_i =$ constante si H était indépendant de q_i.

Note à l'occasion du Mémoire précédent;

Par M. J. LIOUVILLE.

Le Mémoire de M. Edmond Bour, qui précède, est un extrait substantiel du remarquable travail que ce jeune ingénieur a présenté à l'Académie des Sciences le 5 mars 1855, et sur lequel nous avons (M. Lamé, M. Chasles et moi) fait un Rapport qu'on a inséré dans le cahier d'avril du présent volume. Les géomètres nous sauront gré de leur avoir communiqué de suite, au moins dans leur partie principale, ces importantes recherches; ils ratifieront, j'en suis assuré, tous nos éloges.

M. Bour a profité de la remarque que nous avions faite relativement à la fonction H qui entre dans son système d'équations

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dH}{dp_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dp_n}{dt} = \frac{dH}{dq_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = -\frac{dH}{dp_n}.$$

Ayant d'abord en vue les équations de la Dynamique dans le cas où le principe des forces vives a lieu, M. Bour supposait la fonction H indépendante du temps. Pour lui H était une fonction quelconque de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$, où t n'entrait pas. Il a reconnu depuis que, comme nous le lui avions dit, ses calculs subsistent et gagnent encore en élégance lorsqu'on prend H fonction quelconque de $t, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$.

Au reste, ce cas général peut toujours être ramené au cas particulier où M. Bour se renfermait d'abord, pourvu qu'on augmente de deux unités le nombre des équations en introduisant deux variables nouvelles τ et u : la première τ est supposée égale à t + constante, en sorte que l'on a

$$\frac{dt}{d\tau} = 1;$$

l'autre u est définie par l'équation

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{dH}{dt}.$$

Soit, en effet,

$$V = H + u.$$

Comme τ et u n'entrent pas dans H, qui est une fonction de t, p_1, q_1, ..., p_n, q_n seulement, on a

$$\frac{dV}{du} = 1 = \frac{dt}{d\tau}.$$

D'ailleurs les dérivées de H et celles de V, par rapport à t, p_1, q_1, ..., p_n, q_n, sont égales. On peut donc poser ce système

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{dV}{du}, & \frac{du}{d\tau} &= -\frac{dV}{dt},\\
\frac{dp_1}{d\tau} &= \frac{dV}{dq_1}, & \frac{dq_1}{d\tau} &= -\frac{dV}{dp_1},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
\frac{dp_n}{d\tau} &= \frac{dV}{dq_n}, & \frac{dq_n}{d\tau} &= -\frac{dV}{dp_n},
\end{aligned}$$

entièrement semblable à celui de M. Bour, puisque τ (qui est ici la variable indépendante et qui remplace le temps) n'entre pas dans la fonction V qui sert à former les seconds membres.

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extraits de deux communications faites à l'Académie des Sciences le 9 décembre 1844, et le 31 mars 1851;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Je crois bon d'insérer ici, d'après les *Comptes rendus,* les extraits de deux communications que j'ai faites verbalement à l'Académie des Sciences, il y a bien longtemps déjà, sur la théorie et les propriétés des fonctions elliptiques. J'attache, je l'avouerai, de l'importance à ces communications. La première remonte au 9 décembre 1844 (*Comptes rendus,* tome XIX, page 1261) : elle a eu lieu à l'occasion d'un beau travail de M. Chasles. Je transcris texte et notes sans y rien changer, et le titre même :

Remarques de M. LIOUVILLE.

« La communication intéressante de M. Chasles est relative aux seules fonctions elliptiques. Il serait bien à désirer que M. Chasles pût étendre ses ingénieuses considérations géométriques aux transcendantes d'un ordre plus élevé, et d'abord aux fonctions abéliennes de première classe, qui proviennent d'intégrales relatives à un radical carré portant sur un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Ces fonctions se présentent dans un grand nombre de problèmes. On les rencontre, par exemple, dans l'équation de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, et dans l'expression d'un arc quelconque de cette ligne. Dès lors, à l'aide d'un célèbre théorème d'Abel, on peut conclure, pour certaines combinaisons de pareils arcs, des théorèmes analogues à ceux que l'on connaît pour les arcs d'ellipse. Mais une discussion géométrique détaillée et approfondie donnerait sans doute à ces théorèmes une forme et une élégance nouvelles.

» Sur une surface quelconque, la ligne géodésique jouit de cette propriété, que son rayon de courbure est en chaque point normal à la surface. De là une équation différentielle du second ordre, dont M. Jacobi a le premier trouvé l'intégrale avec deux constantes arbitraires, pour le cas de l'ellipsoïde à trois axes. En cherchant à vérifier la formule remarquable qu'il a donnée, et dans laquelle figurent, comme je l'ai dit, des fonctions abéliennes, j'ai d'abord obtenu une intégrale première, d'où l'intégrale seconde se déduit immédiatement, et qui me paraît assez simple pour qu'on puisse espérer d'y parvenir par une méthode purement géométrique. Je prends la liberté de recommander cette recherche au talent de M. Chasles, si éprouvé dans ces matières. Voici l'équation qu'il s'agirait d'établir. Soit AMB une ligne géodésique tracée à volonté sur l'ellipsoïde. Par le point quelconque M, faisons passer les hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, dont les sections principales sont homofocales à celles de l'ellipsoïde. Soient μ^2, ν^2 les carrés de leurs demi-axes dirigés suivant le grand axe de l'ellipsoïde; on aura

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{constante},$$

i désignant l'angle que la tangente à la ligne géodésique fait avec la normale au second hyperboloïde [*].

» Puisqu'il vient d'être question de fonctions elliptiques, je profiterai de l'occasion pour donner l'énoncé d'un principe général qui me paraît imprimer à l'étude de ces fonctions un caractère d'unité et de simplicité tout particulier. Soient z une variable quelconque, réelle ou imaginaire, et $\psi(z)$ une fonction de z bien déterminée, je veux dire une fonction qui, pour chaque valeur $x + y\sqrt{-1}$ de z, prenne une valeur unique toujours la même, lorsque x et y redeviennent les mêmes. Si une telle fonction est doublement périodique, et si l'on reconnaît qu'elle n'est jamais infinie, on pourra affirmer par cela seul qu'elle se réduit à une simple constante.

» Ce principe (qui conduit du reste à des conséquences nombreuses et utiles dans d'autres parties de l'analyse) m'a fourni sans difficulté les théorèmes connus relatifs, soit à la multiplication et à la transfor-

« [*] Dans le Journal de M. Crelle, M. Joachimsthal a obtenu un résultat tout aussi simple que celui-là, mais de forme différente. »

mation des fonctions elliptiques, soit à leurs développements en séries. J'en ai tiré aussi une démonstration des belles formules par lesquelles M. Jacobi est parvenu à exprimer explicitement les racines des équations de degré élevé relatives à la division [*]. Enfin, j'ai rencontré divers résultats que je crois nouveaux. Dans la méthode que j'ai suivie, les intégrales qui ont donné naissance aux fonctions elliptiques et les modules mêmes dont elles dépendent, disparaissent en quelque sorte pour ne laisser voir que les périodes et les valeurs pour lesquelles les fonctions deviennent nulles ou infinies. Cette communication verbale ne comporterait pas des développements plus étendus. Mais, dès à présent, je dois dire que les études auxquelles je me suis livré ont encore augmenté l'admiration si vive que m'inspiraient déjà, à tant de titres, les travaux de M. Jacobi. »

La seconde communication que je veux rappeler ici, a eu lieu le 31 mars 1851, à l'occasion d'un Rapport que M. Cauchy venait de faire sur un Mémoire de M. Hermite. Voici ce qu'on lit à ce sujet au tome XXXII des *Comptes rendus*, page 540 :

Remarques de M. Liouville.

« Sans s'opposer aux conclusions du Rapport, M. Liouville croit devoir rappeler qu'il a, lui aussi, trouvé depuis longtemps une théorie générale des fonctions doublement périodiques, dont il a donné incidemment à l'Académie, dès 1844, à propos d'un Mémoire de M. Chasles sur la construction géométrique des amplitudes des fonctions elliptiques, une vue très-nette qu'on retrouve au tome XIX des *Comptes rendus* (page 1261, séance du 9 décembre 1844).

« La méthode que j'ai suivie, dit M. Liouville, est si simple dans » ses détails, qu'elle pourra, je crois, sans inconvénient, venir après » d'autres, même analogues, mais qui n'ont pas, ce me semble, le » caractère tout intuitif et élémentaire que j'ai donné à la mienne en » m'attachant à aller pas à pas du simple au composé, par la consi-

« [*] Journal de M. Crelle, tome IV. M. Jacobi n'a pas ajouté de démonstration, mais je dois dire que M. Hermite (qui s'est livré, sur toutes ces questions, à de profondes recherches) en a, avant moi, trouvé une dont il a bien voulu me faire part; la méthode qu'il a employée est, du reste, très-différente de la mienne. »

» dération continuelle et toujours directe d'un seul principe. J'ai
» toutefois, on le comprend, un certain intérêt à établir, non pas
» que mon travail est ancien, cela résulte des *Comptes rendus*, mais
» que les détails principaux en ont été arrêtés depuis plusieurs an-
» nées, et ont été communiqués très-explicitement à divers géomètres
» français ou étrangers. Or j'ai chez moi, et je pourrai déposer sur le
» bureau, avant la fin de la séance, une pièce manuscrite qui pa-
» raîtra concluante à cet égard. Deux géomètres allemands distingués,
» MM. Borchardt et Joachimsthal, pendant leur voyage à Paris en 1847,
» ont bien voulu sacrifier quelques heures pour entendre l'exposition
» de ma doctrine, et M. Borchardt a rédigé les leçons que j'étais ainsi
» conduit à faire. J'avais permis à M. Borchardt de montrer cette
» rédaction à qui il voudrait, et j'ai su de lui qu'elle a été mise sous
» les yeux de M. Jacobi. Pressé par le temps, je n'avais pu parler
» des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce. Mais
» cela importe peu. La classification des fonctions bien déterminées
» doublement périodiques, d'après le nombre des valeurs irréduc-
» tibles par les périodes, mais d'ailleurs égales ou inégales, qui les
» rendent infinies; la démonstration de ce théorème capital, que
» toute fonction de ce genre qui a moins de deux infinis doit se ré-
» duire à une simple constante; la proposition importante aussi,
» que le nombre des racines qui annulent la fonction est toujours pré-
» cisément égal au nombre des infinis de cette fonction, et que, de
» plus, les sommes des valeurs de la variable, relatives à ces deux
» circonstances d'une fonction nulle ou infinie, sont toujours égales
» entre elles aux multiples près des périodes; l'expression des fonc-
» tions à n infinis par des sommes ou par des produits de fonctions
» à deux infinis; la théorie détaillée des fonctions à deux infinis et
» leur réduction aux fonctions elliptiques, qui sont dès lors l'élément
» unique des fonctions doublement périodiques à un nombre d'infinis
» limité; les théorèmes sur l'addition et sur la transformation directe
» ou inverse, rendus pour ainsi dire aussi simples que le problème
» d'algèbre de former une fraction rationnelle dont le numérateur et
» le dénominateur s'évanouissent pour des valeurs données : tout
» cela, c'est-à-dire la partie essentielle de mon travail, est dans le
» manuscrit de M. Borchardt, que je communiquerai dans quelques
» instants à l'Académie. »

» M. Liouville a, en effet, avant la fin de la séance, déposé sur le bureau le manuscrit de M. Borchardt. Nous transcrivons la table des matières que M. Borchardt a placée en tête.

» Première partie. — *Théorie générale.*

» **1**. Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible.

» **2**. Une fonction doublement périodique et à un seul infini est impossible.

» **3**. Fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales.

» **4**. Fonctions doublement périodiques et à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques et à deux infinis.

» **5**. Leur développement en produits de fonctions périodiques et à trois infinis, lorsque le nombre des infinis est pair.

» **6**. Leur développement en fractions de la forme $\frac{M + N\varphi'(z)}{L}$, $\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique et à deux infinis, $\varphi'(z)$ son coefficient différentiel, et L, M, N des fonctions entières de $\varphi(z)$.

» Seconde partie. — *Applications.*

» **7**. Détermination du coefficient différentiel des fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du sin am z.

» **8**. Transformation du sin am z. Expressions en forme d'une somme et d'un produit.

» **9**. Transformation inverse du sin am z. Formule d'Abel. Formule de M. Jacobi. »

Disons maintenant que M. Cauchy, en faisant imprimer son Rapport, y a joint (au bas de la page 450) une note où l'antériorité de mes recherches est reconnue. Cette note est relative à la phrase que voici :

« Par suite aussi, l'on peut réduire à une fonction rationnelle de

» fonctions elliptiques, toute fonction doublement périodique qui
» reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infi-
» nie. »

Elle est ainsi conçue :

« Déjà en 1844, M. Liouville avait obtenu, par une méthode très-
» différente de celle qu'a suivie M. Hermite, et avait énoncé, en pré-
» sence de ce dernier, la réduction ici indiquée. »

On conviendra sans doute que ce théorème méritait d'être réclamé : je remercie M. Cauchy de me l'avoir rendu.

Quoique j'aie différé jusqu'ici de livrer à l'impression l'ouvrage que j'ai écrit sur la théorie des fonctions elliptiques, les parties principales de ma méthode sont aujourd'hui bien connues, soit par la rédaction (qui s'est répandue) de M. Borchardt, soit par les leçons que j'ai faites sur ce sujet au Collége de France dans le second semestre de l'année scolaire 1850-1851. MM. Briot et Bouquet, par exemple, se sont appuyés sur mes principes et m'ont fait l'honneur de me citer dans un beau Mémoire qu'ils ont présenté dernièrement à l'Académie.

J'ai dit que le travail de M. Borchardt avait été mis sous les yeux de Jacobi. Au risque d'être accusé de vanité, je citerai la phrase suivante d'une lettre que M. Borchardt m'a adressée le 28 septembre 1848 :

« M. Jacobi m'écrit que c'est avec le plus grand plaisir qu'il a lu
» votre théorie et qu'il en a puisé beaucoup d'instruction pour lui-
» même, qu'il souhaite vivement de la voir publier bientôt et qu'alors
» il se propose de vous écrire. »

Il y a là du moins un témoignage de bienveillance et d'amitié que je suis heureux d'avoir obtenu.

RECHERCHES NOUVELLES

SUR

LES PORISMES D'EUCLIDE,

PAR M. P. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées

La question des *Porismes* est née de la difficulté d'interpréter convenablement un texte du géomètre grec Pappus, dans lequel cet auteur parle d'un ouvrage d'Euclide sur les Porismes. Cette difficulté d'interprétation a occupé plusieurs géomètres célèbres; aujourd'hui encore on peut dire qu'elle n'a pas cessé d'être une énigme. Je me propose de développer ici [*] quelques idées qui me paraissent de nature à faire envisager ce sujet sous un aspect nouveau, et certes très-inattendu. Il ne s'agit, en effet, de rien moins que de montrer que, sans s'écarter en rien du texte de Pappus, en le prenant tel qu'il nous est parvenu, ou du moins en n'y faisant qu'un très-petit nombre de corrections dont la nécessité peut être mise sur le compte des copistes, et surtout en s'attachant au sens littéral, on parvient sans peine à comprendre tout ou presque tout ce que l'auteur veut dire, à se rendre compte de ce qu'étaient les porismes d'Euclide, et même à les *retrouver*.

Comme peu de personnes sont à même de consulter les documents

---

[*] J'ai déjà publié sur cette question des Porismes deux aperçus dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 octobre 1849 et 6 juin 1853). Le premier était trop restreint pour donner une idée exacte du sens que j'attachais au terme *porisme*; ce n'était pour ainsi dire qu'un cas particulier d'une conception que j'ai ensuite exposée avec la généralité qu'elle comportait, et que je vais maintenant justifier dans ses détails.

originaux sur lesquels roule toute la question, et notamment le *Recueil mathématique* de Pappus, qui est encore inédit [*], je commencerai par mettre sous les yeux du lecteur les textes ou passages des auteurs grecs dans lesquels il est fait mention des Porismes [**]. J'essayerai ensuite de faire connaître, au moins dans ce qu'elles ont de plus saillant, les opinions et conjectures émises successivement par divers savants sur ce que pouvaient être les propositions auxquelles les anciens avaient donné ce nom. Après avoir ainsi tracé en quelque sorte l'historique de leurs recherches, j'exposerai les miennes.

La langue grecque ne m'est pas assez familière pour que j'ose espérer que la traduction que je donne des textes de Pappus et de Proclus sera jugée irréprochable. J'ai dû me laisser guider principalement par le sentiment des choses géométriques. Un certain nombre de fautes ont pu ainsi m'échapper, mais j'aime à croire qu'elles ne seront pas assez graves pour ôter toute vraisemblance à l'explication que je soumets aux géomètres.

---

[*] Il faut excepter quelques fragments, dont le plus important est la préface du septième livre, publiée par Halley en tête de sa version latine du Traité de la *Section de raison* (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis*; in-8°; Oxoniæ, 1706), ouvrage rare, n'ayant été tiré qu'à 400 exemplaires. J'en ai fait usage après avoir collationné le texte grec sur les manuscrits nos 2368 et 2440 de la Bibliothèque Impériale de Paris, lesquels m'ont fourni quelques leçons évidemment préférables à celles de Halley.

On a du recueil de Pappus une version latine, due à Frédéric Commandin dont il existe deux éditions (*Pappi Alexandrini mathematicæ collectiones*; in-folio; Pisauri, 1588, et Bononiæ, 1660). La Notice sur les Porismes a été revue et considérablement modifiée par Halley. Simson l'a traduite de nouveau (*Opera quædam reliqua*; in-4°; Glasguæ, 1776, pag. 346-352). Mais le travail de Commandin m'a été surtout utile en me permettant de restituer en quelque sorte le manuscrit dont ce traducteur s'était servi.

[**] Le texte de Proclus, auquel j'emprunte deux passages, se trouve à la suite de l'Euclide grec publié à Bâle en 1533. Il a été traduit en latin par Barocius (*Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentariorum libri IV*; in-folio; Patavii, 1560).

PREMIÈRE PARTIE.

MATÉRIAUX ET HISTORIQUE DE LA QUESTION.

§ I. — *Notice de Pappus sur les Porismes d'Euclide* [*].

« Après les *Contacts*, viennent les Porismes d'Euclide, recueil » que rendent très-utile, pour l'analyse des problèmes difficiles et des » conséquences des hypothèses [a], beaucoup de choses dont la na-

[*] Voici le texte de cette Notice :

Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματα ἔστιν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενομένων [a], ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. Οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπ' Εὐκλείδου γραφεισι πρώτου. χωρὶς εἰ μή τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν· ἑκάστου μὲν πλῆθος ὡρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δὲ Εὐκλείδου μίαν ἑκάστου θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν [b]. Ταῦτα δὲ λεπτὴν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν, καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. Ἅπαντα δὲ αὐτων τὰ εἴδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶ οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσην πως τούτων ἐχούσης ἰδέας· ὥστε τὰς προτάσεις αὐτων δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων· παρ' ὃ καὶ συμβέβηκεν τῶν πολλων γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβανειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα, τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας τῷ σχήματι μόνον τῆς προτάσεως.

Τὰς δὲ διαφορὰς τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾔδεισαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. Ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πρόβλημα δὲ το προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου· πόρισμα δὲ τὸ προτεινομενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. Μετεγράφη δὲ οὗτος ο τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων, μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις [c], καὶ δεικνύντων αυτο μόνον τοῦθ' ὅτι ἐστὶ τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο, καὶ ἐλεγχόμενοι ὑπὸ τοῦ ὅρου και τῶν διδασκομένων, ἔγραψαν ἀπὸ συμβεβηκοτος οὕτως; πορισμα ἐστι τὸ λεῖπον υποθεσει τοπικοῦ θεωρήματος [d]. Τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδος ἐστιν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσι ἐν τῷ ἀναλυομένῳ. Κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων ἤθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται [e], δια τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. Τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δε στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητας.

Συμβέβηκεν δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασι, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιο-

[a] Littéralement *des événements*, comme dans ce titre d'un ouvrage de Desargues : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements de la rencontre d'un cône avec un plan*. Dans les manuscrits, de même que dans le texte de Halley, il y a γενῶν au lieu de γενομένων. J'ai cru néanmoins devoir faire ce changement, sans lequel le texte n'aurait, pour ainsi dire, pas de sens.

Nota. Chacune des notes [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], [h], [i], [j], [k], [l] correspond à la fois à un renvoi du texte français et du texte grec.

» ture offre une abondance illimitée. Il n'a toutefois été ajouté aucun » porisme à ceux qu'Euclide le premier a écrits, si ce n'est par cer- » tains géomètres qui, avant nous, ont mal à propos placé, à la suite de

---

τατα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. Περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατὸν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἑκάστου εἴδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα τῆς πολυπληθίας ἐν ἢ ὀλίγα.... πρὸς ἀρχὴν δεδομένον..... τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν [f] ὁμοειδῆ παρ' ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἴδους τῶν τόπων, ὡς δέκα τὸ πλῆθος. Διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας ἐν μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὑρόντες οὕτως ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου τρία τὰ ἐπὶ μιᾶς σημεῖα, ἢ παραλλήλου ἑτέρα δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἑνὸς ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας [g], καὶ τοῦθ' ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνον, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν· ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτω λεγόμενον. Ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν δεδομένα ᾖ, καὶ τῶν ἐπὶ ἑτέρας ἕκαστον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἢ καθολικώτερον οὕτως, ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾶς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ᾖ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμόν, ἡ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχει σημεῖον ἁπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, ὧν τρία [h] μὴ πρὸς γωνίαν ὑπάρχον τριγώνου χωρίου, ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας [i]. Τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. Καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβληκέναι, ὧν ἕκαστον οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων· αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὖσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὂν πολλαῖς ὑποθέσεσιν διαφόροις συμβέβηκε.

Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη [j] τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων (ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο). Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνῃ δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἑτέρα ἀπὸ ἑτέρας λόγον ἔχουσαν δοθέντα. Ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς· ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἅπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς [k]· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε ἐν παραθέσει ἐστίν [l]· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὁ μὲν τὶ δοθὲν ἐστιν, ὁ δὲ λόγον ἔχει προς ἀποτομήν· ὅτι τόδε τὸ χωρίον, ἢ τόδε μετά τινος χωρίου δοθέντος, ἐστίν,... ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθεντα, λόγον ἔχει πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ δοθέντος καὶ τῆσδε, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρός τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι ἥδε ἀποτέμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἤτοι λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν, ἢ μετὰ δοθεντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶνδε καὶ συναμφοτέρου τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ

» quelques-uns, de nouvelles démonstrations, chaque porisme étant, » à la vérité, présenté plusieurs fois, comme nous l'expliquerons, » mais Euclide n'en donnant chaque fois qu'une seule démonstration » extrêmement claire [*b*]. La théorie en est fine et naturelle, et néces- » saire et très-générale, et fait les délices de ceux qui savent voir et » trouver. Toutes ces choses ne sont, quant à leur nature, ni des » théorèmes, ni des problèmes, mais tiennent en quelque sorte le » milieu entre les deux; de sorte que les propositions qui ont ces » choses pour objet peuvent être mises sous forme de théorèmes ou » de problèmes; d'où il est résulté que, de beaucoup de géomètres, » les uns estiment qu'elles doivent être classées parmi les théorèmes, » tandis que d'autres, ne tenant compte que de la forme des propo- » sitions, les considèrent comme des problèmes.

» Mais les différences entre ces trois choses ont été mieux connues » des anciens, ainsi qu'on le voit par leurs définitions; car ils disaient : » Théorème est une vérité que l'on énonce, et qu'il faut rendre évi- » dente par une démonstration; problème est un but que l'on définit » et qu'il faut atteindre par une construction; porisme est une chose

---

συναμφοτέρου τῆσδε τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα· καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς προς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρὸς τινα ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε.

Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσὶν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπο τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου καὶ τῆσδε πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τοδε δοθὲν περιέξουσι τῷ εἴδει τρίγωνον· ὅτι ἐστί τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἤτοι ἐν παραθέσει ἔσται, ἢ μετὰ τινος εὐθείας ἐπὶ το δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. Ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτον λήμματα λη', αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα'.

[*b*] Halley traduit : « ... Nihil vero additum est iis quæ Euclides primum scripserat, » præterquam quod scioli nonnulli qui nos præcesserunt, sequentibus editionibus » pauca de suis immiscuerint. Apud hos enim unumquodque porisma definitum » habet demonstrationum numerum : cum Euclides ipse non nisi unam eamque » maxime evidentem in singulis posuerit. » (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis*, præf., pag. XXXIII.)

» qu'on demande de découvrir. Cette définition a été changée par » des géomètres récents, lesquels, hors d'état de découvrir tous les » porismes, mais se prévalant de ce qu'ils voyaient dans l'ouvrage » d'Euclide [*c*], et montrant ce qu'il faut chercher sans pouvoir le » trouver, ont, sans tenir compte de la définition précitée et de ce » qui est enseigné, écrit ceci d'après une circonstance particulière [à » certaines propositions] : Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hy- » pothèse pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local [*d*]. » A cette espèce de porismes appartiennent les lieux, et ils abon- » dent dans l'*analyse*. Ils sont, les porismes en étant retranchés, » réunis en groupes distincts ayant chacun son titre particulier [*e*], » à cause que cette espèce est beaucoup plus nombreuse que les » autres. En effet, parmi les lieux, les uns sont *plans*, d'autres » *solides*, d'autres *linéaires*, et il y a en outre ceux *aux moyennes*.

» Il arrive aux porismes que les propositions en sont difficiles à » suivre à cause de l'incertitude résultant de plusieurs choses ordinai- » rement sous-entendues, de sorte que beaucoup de géomètres ne » saisissent qu'en partie ce dont il s'agit, et que ce qu'il y a de plus » essentiel leur échappe. Quant à réunir plusieurs de ces propositions » dans une seule, cela n'est guère possible, parce qu'Euclide ne donne » pas beaucoup d'exemples de chaque porisme, mais seulement un ou » peu comme échantillons pris dans le grand nombre. Cependant, il » en a placé..... au commencement du premier livre quelques-uns [*f*] » entièrement de la même nature, appartenant à cette catégorie » si nombreuse des lieux, de sorte que leur nombre s'élève à dix.

[*c*] Le sens me paraît douteux en cet endroit.

[*d*] Commandin a traduit : « Porisma est quod hypothesi deficit a locali theore- » mate. » Halley se rapproche davantage du texte : « Porisma est quod deest in hypo- » thesi theorematis localis. »

[*e*] Commandin et tous les autres commentateurs ont traduit : « Ac seorsim à » porismatibus collecta, ... » ou d'une manière analogue.

[*f*] Le texte est évidemment corrompu dans Halley et dans les manuscrits. Le voici tel qu'on le trouve : ... *ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα πολυπληθίας ἐν ῇ ὀλίγα πρὸς ἀρχῇν. Δεδομένου τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν*, etc. Toutefois on entrevoit le sens. Je dois à M. E. Littré l'idée de placer un point après le mot *ὀλίγα*, et d'écrire ἐν ᾗ au lieu de ἐν ῇ. Je propose, page 289, une restitution conjecturale pour le surplus.

» C'est pourquoi, trouvant possible de les comprendre dans une seule
» proposition, nous écrivons celle-ci comme il suit :

» Si, dans un système de quatre droites se coupant deux à deux en
» six points, les trois situés sur l'une d'elles sont donnés, ou les deux
» quand cette droite est parallèle à l'une des trois autres [*g*], et que
» les points restants, un seul excepté, soient assujettis à demeurer cha-
» cun sur une droite fixe, le dernier point demeurera pareillement sur
» une droite fixe. Il ne s'agit ici que de quatre droites telles que pas
» plus de deux ne se coupent en un seul point; mais ce que l'on ne sait
» pas, c'est que la même chose est vraie pour un nombre quelconque de
» droites, de cette manière. Tant de droites qu'on voudra se coupant
» les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si
» tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont
» fixes, et que chacun des points où l'une de ces dernières est coupée
» par les droites restantes soit assujetti à demeurer sur une droite
» fixe; ou plus généralement : tant de droites qu'on voudra se coupant
» les unes les autres, mais pas plus de deux en un même point, si
» tous les points où l'une d'elles est rencontrée par les autres sont
» fixes, et que parmi les points d'intersection de ces dernières, lesquels
» forment un nombre triangulaire, il s'en trouve autant d'assujettis à
» demeurer sur des droites fixes qu'il y a d'unités dans le côté de ce
» nombre, de telle sorte que trois [*h*] de ces points ne puissent être
» les sommets de l'un des triangles formés par les droites mobiles,
» chacun des points d'intersection restants sera pareillement assujetti
» à demeurer sur une droite fixe [*i*]. Il est vraisemblable que l'auteur des
» Éléments n'ignorait pas cette extension, mais n'a fait qu'en poser le
» point de départ; et il paraît avoir répandu dans tous ses porismes les

---

[*g*] J'ai suivi à peu de chose près la leçon du manuscrit n° 2440. Les termes ὑπτιον et παρυπτίον ne m'ont pas paru susceptibles d'être rendus autrement que par une périphrase. Simson traduit : « Si quadrilateri cujus anguli oppositi vel ex ad-
» verso vel ad easdem partes sunt positi (lateribus productis) data sint in uno ipsorum
» tria puncta (intersectionum scilicet); cætera vero puncta præter unum tangant rec-
» tam positione datam, etc. » (*Opera quædam reliqua*, page 348.)

[*h*] Halley et les manuscrits portent τριῶν. Le sens exige qu'on mette τρία.

[*i*] Simson traduit : « ... Vel generalius sic. Si quotcumque rectæ occurant inter se,
» neque sint plures quam duæ per idem punctum, omnia vero puncta (intersec-

» principes et les germes d'une multitude de propositions de divers » genres. Il ne faut pas distinguer les porismes d'après les différences » des hypothèses, mais d'après celles des choses qui arrivent ou sont » cherchées. Toutes les hypothèses diffèrent les unes des autres, étant » très-particulières, mais chacune des choses qui arrivent ou qui sont » cherchées se présente absolument la même dans plusieurs hypothèses » différentes.

» Voici en conséquence, pour le premier livre, les genres [j] des » choses cherchées dans les propositions (la figure est au commence- » ment du numéro 7). Si de deux points fixes on mène deux droites » se coupant sur une droite fixe, elles retranchent respectivement de » deux autres droites fixes, à partir de deux points donnés (sur ces der- » nières), des segments qui sont entre eux dans un rapport constant. Et » ensuite : que tel point décrit une droite donnée de position ; que le rap- » port de telle droite à telle autre est constant [k]; que le rapport de telle » droite à une abscisse qu'elle détermine est constant ; que telle droite est » donnée de direction [l]; que telle droite passe par un point fixe ; que » telle droite a un rapport constant avec un segment intercepté entre

---

» tionum scilicet) in earum unà data sint; reliquorum numerus erit numerus » triangularis, cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione datum tan- » gentium : quarum intersectionum si nullæ tres existant ad angulos trianguli spatii » (nullæ quatuor ad angulos quadrilateri, nullæ quinque ad angulos quinque lateri, etc., » i. e. universim si nullæ harum intersectionum in orbem redeant), etc. » (*Opera quædam reliqua*, page 349)

[j] *γενόμενα* conviendrait peut-être mieux que *γένη*.

[k] Halley traduit : « quod ratio ipsius... ad rectam... data est, etc. ; » il intercale des points comme si l'on eût omis dans le texte des lettres de renvoi à des figures qu'il suppose perdues. Toute sa version, à partir de cet exemple, est ainsi interrompue par des points ; ce qu'on ne voit pas dans celle de Commandin. Pour qu'une semblable hypothèse fût justifiée, il faudrait que le texte grec fût rétabli de cette manière : « *ὅτι λόγος τῆς... πρὸς τὴν... δοθεὶς* », en supprimant partout la particule *δὲ*, dont la présence donne au texte la signification générale que j'ai adoptée.

[l] Les manuscrits portent *ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν*. Le sens général m'a paru exiger que l'on mît *ὅτι ἥδε ἐν παραθέσει ἐστίν*, de manière à indiquer le parallélisme d'une droite, variable de position avec une droite fixe.

» elle et un point fixe; que telle droite a un rapport constant avec une » autre droite menée de son extrémité variable; que tel rectangle a » un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une certaine » droite variable et une droite donnée; que tel rectangle équivaut à » un rectangle constant, plus un autre rectangle qui varie proportionnellement à une certaine abscisse; que tel rectangle variable, » pris seul ou avec un espace donné,..... a un rapport constant avec » une certaine abscisse; que telle droite variable, plus une autre droite » proportionnelle à une seconde droite variable, est dans un rapport » constant avec un segment mesuré à partir d'un point fixe; que le » triangle qui a pour sommet un point fixe et pour base telle droite » variable est équivalent au triangle qui a pour sommet un autre point » fixe et pour base un segment mesuré à partir d'un point fixe, que » la somme de deux droites variables a un rapport constant avec un » segment mesuré à partir d'un point fixe; que telle droite détermine » sur des droites données des segments dont le produit est constant.

» Dans le second livre, les hypothèses sont autres que dans le premier, mais le plus grand nombre des choses cherchées sont les » mêmes, et, en outre, il y a celles-ci : que tel espace variable, ou » la somme de cet espace et d'un espace donné, est en raison constante avec une certaine abscisse; que le rectangle qui a pour » côtés telle droite variable et telle autre droite variable, est en raison » constante avec une certaine abscisse; que le rectangle qui a pour » côtés la somme de deux droites variables et la somme de deux autres droites variables est en raison constante avec une certaine » abscisse; que la somme du rectangle qui a pour côté telle droite » variable et la même droite augmentée d'une autre droite proportionnelle à une droite variable, et le rectangle qui a pour côtés telle » droite et telle autre, cette dernière étant proportionnelle à une droite » variable, est en raison constante avec une certaine abscisse; que la » somme de ces deux rectangles est en raison constante avec une » certaine abscisse; que le rectangle de telle droite variable et de telle » autre droite variable est constant.

» Dans le troisième livre, le plus grand nombre des hypothèses ont » pour objet le demi-cercle, et quelques-unes le cercle entier et les

» segments. Des choses cherchées, beaucoup sont à peu près semblables à celles indiquées ci-dessus. Il y a en outre celles-ci : que le rectangle de deux droites variables est au rectangle de deux autres droites variables dans un rapport constant ; que le quarré construit sur telle droite est en rapport constant avec une certaine abscisse ; que le rectangle de deux droites variables est dans un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et un segment variable mesuré à partir d'un point donné ; que le quarré construit sur telle droite est dans un rapport constant avec le rectangle qui a pour côtés une droite donnée et le segment déterminé sur une droite fixe, à partir d'un point donné, par la perpendiculaire abaissée sur cette droite. Que le rectangle qui a pour côtés la somme de deux droites variables et une droite proportionnelle à une autre droite variable, est dans un rapport constant avec une certaine abscisse. Qu'il existe un point tel que les droites menées de ce point à deux points variables comprennent un triangle donné d'espèce. Qu'il existe un point tel que les droites menées de ce point à deux points variables interceptent des arcs égaux. Que telle droite est parallèle à une autre droite passant par un point fixe, ou fait avec cette dernière un angle constant.

» Il y a trente-huit lemmes pour les trois livres des Porismes, ils renferment cent soixante et onze théorèmes. »

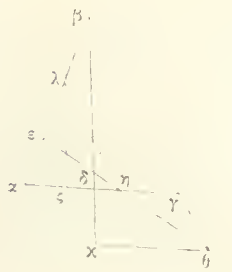
§ II. — *Lemmes relatifs aux porismes.*

Outre cette Notice, Pappus donne les trente-huit lemmes suivants, qui sont relatifs aux propositions de l'ouvrage d'Euclide sur les Porismes [*].

---

[*] J'ai cru devoir les traduire en entier, bien que la plupart soient des théorèmes connus, et que plusieurs ne présentent, par eux-mêmes, aucun intérêt. La question aurait pu sembler n'être pas entière, si je me fusse abstenu de rapporter ici ce document. Toutefois, je me suis permis de ne pas reproduire le texte grec, dont le sens est bien clair dans toutes ses parties, ni la totalité des figures dont quelques lemmes sont accompagnés. Le premier en a cinq, le troisième six, le quatrième huit, et le seizième trois. Ces figures offrent les divers cas de la proposition qu'il s'agit de démontrer ; mais la démonstration est générale, et peut être suivie sur chacune d'elles sans

« I. (Pour le premier porisme du premier livre.) — Soit la figure » $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$, et soit $\alpha\eta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma$. Joignez $\theta\varkappa$. Je dis que $\theta\varkappa$ est » parallèle à $\alpha\gamma$.



» Menez, par le point ζ, $\zeta\lambda$ parallèle à $\beta\delta$. Puis» que l'on a

$$\alpha\eta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma,$$

» il vient par inversion, addition et permutation » $\delta\alpha : \alpha\zeta$, c'est-à-dire, à cause des parallèles,

$$\beta\alpha : \alpha\lambda :: \gamma\alpha : \alpha\eta.$$

» Par conséquent $\lambda\eta$ est parallèle à $\beta\gamma$. On a donc, » à cause des parallèles,

$$\varepsilon\beta : \beta\lambda :: \varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta \quad \text{et aussi} \quad :: \varepsilon\theta : \theta\eta,$$

» d'où

$$\varepsilon\varkappa : \varkappa\zeta :: \varepsilon\theta : \theta\eta.$$

» Donc $\theta\varkappa$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» *Démonstration par la raison composée.* — Puisque l'on a

$$\alpha\zeta : \zeta\eta :: \alpha\delta : \delta\gamma,$$

» il vient par inversion,

$$\eta\zeta : \zeta\alpha :: \gamma\delta : \delta\alpha.$$

» Puis, par addition, permutation et soustraction,

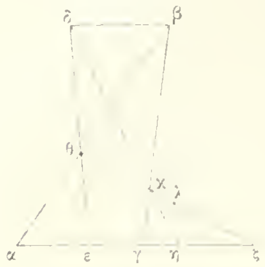
$$\alpha\delta : \delta\zeta :: \alpha\gamma : \gamma\eta.$$

» Mais le rapport de $\alpha\delta$ à $\delta\zeta$ se compose du rapport $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de » celui de $\varepsilon\varkappa$ à $\varkappa\zeta$, et le rapport de $\alpha\gamma$ à $\gamma\eta$ se compose du rapport » de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Donc le rapport composé du rap» port de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$, et de celui de $\varepsilon\varkappa$ à $\varkappa\zeta$, est le même que le rapport

qu'il soit nécessaire d'y rien changer lorsqu'on passe d'un cas à un autre : ce qui mérite d'être remarqué. Les géomètres de l'antiquité simplifiaient ainsi leurs démonstrations, et peut-être l'exemple leur en avait-il été donné par Euclide lui-même; mais il leur a manqué de connaître nos abréviations si commodes, auxquelles je n'ai pas cru devoir entièrement renoncer en traduisant. Chez eux tout est parlé; de là des longueurs, qui nous font sentir le prix des notations et des méthodes modernes.

» composé du rapport de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$ et de celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Soit re-
» tranché le rapport commun de $\alpha\beta$ à $\beta\varepsilon$. Le rapport restant de $\varepsilon\varkappa$
» à $\varkappa\zeta$ est par conséquent égal à celui de $\varepsilon\theta$ à $\theta\eta$. Donc $\theta\varkappa$ est paral-
» lèle à $\alpha\gamma$ [*].

» II. (Pour le second porisme.) — Soit, dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$,
» $\alpha\zeta$ parallèle à $\delta\beta$, et $\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \gamma\eta : \eta\zeta$. Je dis que les trois points
» θ, $\varkappa$, ζ sont en ligne droite.



» Par le point η, menons $\eta\lambda$ parallèle à $\delta\varepsilon$,
» et tirons $\theta\varkappa$ jusqu'à la rencontre de $\eta\lambda$ en λ.
» Puisque l'on a

$$\alpha\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \gamma\eta : \eta\zeta,$$

» il vient, en permutant,

$$\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\zeta : \eta\zeta.$$

» Mais [on a la proportion

$$\eta\lambda : \delta\theta :: \eta\varkappa : \varkappa\delta \quad \text{et} \quad \eta\varkappa : \varkappa\delta :: \gamma\eta : \beta\delta.$$

» D'où résulte celle-ci

$$\lambda\eta : \gamma\eta :: \delta\theta : \delta\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \theta\varepsilon : \alpha\varepsilon,$$

» et par suite] on a

$$\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda,$$

» et conséquemment

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda.$$

» Or $\varepsilon\theta$ est parallèle à $\eta\lambda$. Donc les trois points θ, $\varkappa$, ζ sont en ligne
» droite: ce qu'il fallait démontrer [**].

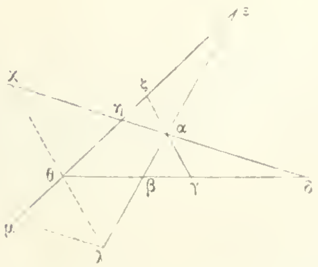
---

[*] Je me suis écarté, dans cette démonstration, de la version de Commandin, qui est évidemment défectueuse. Il me paraît certain que Pappus a voulu faire ici une application du théorème sur les transversales, qui fournit immédiatement les rapports composés dont il faut démontrer l'égalité. (*Voyez*, à ce sujet, la note du lemme IV.)

[**] Le texte grec paraît être incomplet. J'ai rétabli, entre crochets, la démonstration de la proportion $\alpha\varepsilon : \gamma\eta :: \varepsilon\theta : \eta\lambda$.

» III. — Que les trois droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ soient coupées par les » deux transversales $\theta\varepsilon$, $\theta\delta$; je dis que l'on a

$$\theta\beta \times \delta\gamma : \theta\delta \times \beta\gamma :: \theta\varepsilon \times \eta\zeta : \theta\eta \times \varepsilon\zeta.$$



» Par le point θ, menez $\varkappa\lambda$ parallèle à » $\zeta\gamma\alpha$, et soient $\varkappa$, λ les points où cette » droite est rencontrée par $\delta\alpha$, $\alpha\beta$. Par le » point λ, menez parallèlement à $\delta\alpha$ la » droite $\lambda\mu$, et soit μ le point où elle ren- » contre $\varepsilon\theta$. On a de cette manière

$$\varepsilon\zeta : \zeta\alpha :: \varepsilon\theta : \theta\lambda \quad \text{et} \quad \alpha\zeta : \zeta\eta :: \theta\lambda : \theta\mu,$$

» et aussi $:: \theta\varkappa : \varkappa\eta$, à cause des parallèles. Donc, par suite des termes » communs aux deux proportions, on a

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \theta\mu;$$

» donc

$$\theta\varepsilon \times \eta\zeta = \varepsilon\zeta \times \theta\mu.$$

» Formons cet autre rectangle $\varepsilon\zeta \times \theta\eta$. On a l'identité

$$\varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta :: \varepsilon\zeta \times \theta\mu : \varepsilon\zeta \times \eta\theta,$$

» c'est-à-dire $:: \theta\mu : \theta\eta$ ou encore $:: \lambda\theta : \theta\varkappa$. On démontrerait de meme » que l'on a

$$\varkappa\theta : \theta\lambda :: \theta\delta \times \beta\gamma : \theta\beta \times \gamma\delta,$$

» d'où, par inversion,

$$\lambda\theta : \theta\varkappa :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» Mais il est démontré que l'on a

$$\lambda\theta : \theta\varkappa :: \varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta.$$

» On a donc

$$\varepsilon\theta \times \eta\zeta : \varepsilon\zeta \times \eta\theta :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» *Démonstration par la raison composée.* — Le rapport de $\theta\varepsilon \times \eta\zeta$ » à $\theta\eta \times \zeta\varepsilon$ se compose du rapport $\theta\varepsilon$ à $\varepsilon\zeta$, de celui de $\zeta\eta$ à $\varepsilon\zeta$, et de

» celui de $\varepsilon\zeta$ à $\eta\theta$. Or on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\zeta :: \theta\lambda : \zeta\alpha$$

» et

$$\zeta\eta : \eta\theta :: \zeta\alpha : \theta\varkappa;$$

» donc le rapport de $\theta\varepsilon \times \eta\zeta$ à $\theta\eta \times \varepsilon\zeta$ se compose du rapport de » $\theta\lambda$ à $\zeta\alpha$, et de celui de $\zeta\alpha$ à $\theta\varkappa$. Mais le rapport composé du rap- » port de $\theta\lambda$ à $\zeta\alpha$ et de celui de $\zeta\alpha$ à $\theta\varkappa$ est le même que celui de $\theta\lambda$ à » $\theta\varkappa$, de sorte que l'on a

$$\theta\varepsilon \times \eta\zeta : \theta\eta \times \zeta\varepsilon :: \theta\lambda : \theta\varkappa.$$

» On démontrerait de la même manière que l'on a

$$\theta\delta \times \beta\gamma : \theta\beta \times \gamma\delta :: \theta\varkappa : \theta\lambda,$$

» ou, par inversion,

$$\theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma :: \theta\lambda : \theta\varkappa.$$

» On a donc

$$\theta\varepsilon \times \zeta\eta : \theta\eta \times \varepsilon\zeta :: \theta\beta \times \gamma\delta : \theta\delta \times \beta\gamma.$$

» IV. — Soit, dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta\varkappa\lambda$,

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\beta \times \zeta\gamma :: \alpha\zeta \times \delta\varepsilon : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta.$$

» Je dis que les trois points θ, η, ζ sont en ligne droite.

» Puisque l'on a

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\beta \times \gamma\zeta :: \alpha\zeta \times \delta\varepsilon : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta,$$

» il vient, par permutation,

$$\alpha\zeta \times \beta\gamma : \alpha\zeta \times \delta\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\beta\gamma : \delta\varepsilon :: \alpha\beta \times \gamma\zeta : \alpha\delta \times \varepsilon\zeta.$$

» Par le point $\varkappa$, menons $\varkappa\mu$ parallèle à $\alpha\zeta$, le rapport de $\beta\gamma$ à $\delta\varepsilon$ se » compose de celui de $\beta\gamma$ à $\varkappa\nu$, de celui de $\varkappa\nu$ à $\varkappa\mu$, et de celui de $\varkappa\mu$ à » $\delta\varepsilon$. Or le rapport de $\alpha\beta \times \gamma\zeta$ à $\alpha\delta \times \varepsilon\zeta$ se compose de celui de $\alpha\beta$ à » $\alpha\delta$, et de celui de $\gamma\zeta$ à $\varepsilon\zeta$. Soit retranché le rapport commun de » $\beta\alpha$ à $\alpha\delta$, qui est le même que celui de $\varkappa\nu$ à $\varkappa\mu$. Le rapport restant de

» $\gamma\zeta$ à $\zeta\varepsilon$ se compose par conséquent du rapport de $\beta\gamma$ à $\varkappa\nu$, c'est-à-
» dire de $\theta\gamma$ à $\varkappa\theta$, et de celui de $\varkappa\mu$ à $\delta\varepsilon$, c'est-à-dire de $\varkappa\eta$ à $\eta\varepsilon$. D'où
» l'on conclut que les trois points θ, η, ζ sont en ligne droite. Car
» si par le point ε nous menons parallèlement à $\theta\gamma$, la droite $\varepsilon\xi$, qui
» rencontre en ξ le prolongement de $\theta\eta$, le rapport de $\varkappa\eta$ à $\eta\varepsilon$ est le
» même que celui de $\varkappa\theta$ à $\varepsilon\xi$. Le rapport, qui se compose du rapport
» de $\gamma\theta$ à $\theta\varkappa$ et de celui de $\theta\varkappa$ à $\varepsilon\xi$, se transforme dans le rapport de
» $\theta\gamma$ à $\varepsilon\xi$, et le rapport de $\gamma\zeta$ à $\zeta\varepsilon$ est le même que celui de $\gamma\theta$ à $\varepsilon\xi$,
» $\gamma\theta$ étant parallèle à $\varepsilon\xi$. Donc les trois points θ, ξ, ζ sont en ligne
» droite; cela est évident. Donc aussi les trois points θ, η, ζ sont en
» ligne droite [*].

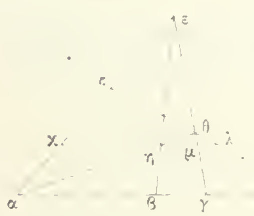
» V. — Dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\theta$, on a

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma.$$

» Soit donc cette proportion

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma,$$

» je dis que les trois points α, η, θ sont en ligne droite.



» Menons, par le point η, $\varkappa\lambda$ parallèle à
» $\alpha\delta$, on a par hypothèse

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\gamma,$$

» mais on a aussi

$$\alpha\delta : \delta\gamma :: \varkappa\lambda : \lambda\eta, \quad \text{et} \quad \alpha\beta : \beta\gamma :: \varkappa\eta : \eta\mu.$$

» D'où

$$\varkappa\lambda : \lambda\eta :: \varkappa\eta : \eta\mu,$$

» et, par soustraction,

$$\varkappa\lambda : \eta\lambda,$$

» c'est-à-dire

$$\alpha\delta : \gamma\delta :: \eta\lambda : \lambda\mu,$$

---

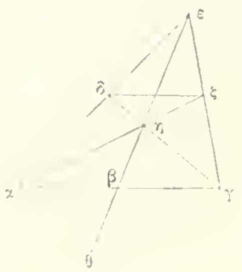
[*] La dernière partie de cette démonstration est la réciproque du théorème fondamental de la théorie des transversales; d'où l'on peut conclure que la proposition directe doit être censée connue. C'est ce que j'ai supposé dans la seconde démonstration du lemme I.

» et, par permutation,

$$\alpha\delta : \eta\lambda :: \gamma\delta : \lambda\mu, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\theta : \theta\lambda,$$

» et $\eta\lambda$ est parallèle à $\delta\alpha$. Donc les trois points α, η, θ sont en ligne » droite. Cela est évident.

» VI. — Soit, dans la même figure, $\delta\zeta$ parallèle à $\alpha\gamma$; alors $\alpha\beta$ est » égal à $\beta\gamma$. Supposons $\alpha\beta = \beta\gamma$: je dis que $\delta\zeta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

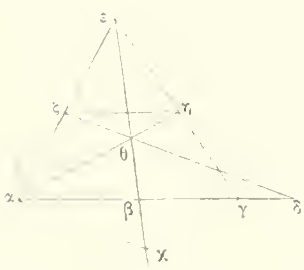


» C'est ce qui a lieu en effet. Car soit pris sur » le prolongement de $\varepsilon\beta$, $\beta\theta = \eta\beta$, joignez $\alpha\theta$, $\theta\gamma$. » la figure $\alpha\theta\gamma\eta$ est un parallélogramme. Et, à » cause de cela, on a

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon :: \gamma\zeta : \zeta\varepsilon,$$

» car chacun des deux rapports dont se compose » cette proposition est égal à celui de $\theta\eta$ à $\eta\varepsilon$. » De sorte que $\delta\zeta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» VII. — Soit encore la même figure, et $\beta\delta$ troisième proportion- » nelle à $\gamma\beta$, $\alpha\beta$: je dis que $\zeta\eta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.



» Prolongez $\varepsilon\beta$; par le point α, menez $\alpha\varkappa$ » parallèle à $\delta\zeta$ et joignez $\gamma\varkappa$. On a, par hy- » pothèse,

$$\gamma\beta : \beta\alpha :: \alpha\beta : \beta\delta,$$

» et, par construction,

$$\alpha\beta : \beta\delta :: \varkappa\beta : \beta\theta,$$

» et par conséquent

$$\gamma\beta : \beta\alpha :: \varkappa\beta : \beta\theta.$$

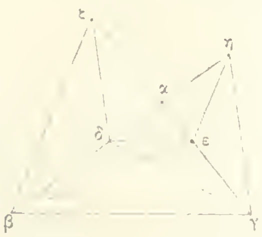
» Donc $\varkappa\gamma$ est parallèle à $\alpha\theta$. D'où il suit que l'on a

$$\alpha\zeta : \zeta\varepsilon :: \gamma\eta : \eta\varepsilon,$$

» car chacun des rapports qui composent cette proportion est le » même que celui de $\varkappa\theta$ à $\theta\varepsilon$. De sorte que $\zeta\eta$ est parallèle à $\alpha\gamma$.

» VIII. — Soit dans la figure $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta$ (en grec βωμίσκος, ayant la

» forme d'un petit autel), $\delta\varepsilon$ parallèle à $\beta\gamma$, et $\varepsilon\eta$ parallèle à $\beta\zeta$: je dis
» que $\delta\zeta$ est parallèle à $\gamma\eta$.

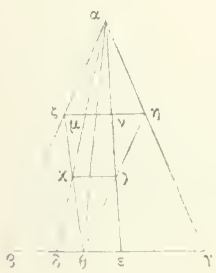


» Joignez $\beta\varepsilon$, $\delta\gamma$, $\zeta\eta$. Le triangle $\delta\beta\varepsilon$ est, d'après cette construction, équivalent au triangle $\delta\gamma\varepsilon$. Ajoutons à l'un et à l'autre le triangle $\delta\alpha\varepsilon$. Le triangle total $\alpha\beta\varepsilon$ est par conséquent équivalent au triangle total $\gamma\delta\alpha$. Maintenant, puisque $\beta\zeta$ est parallèle à $\varepsilon\eta$, le triangle $\beta\zeta\varepsilon$ est équivalent au triangle $\beta\zeta\eta$. Retranchons de part et d'autre le triangle $\alpha\beta\zeta$. Le triangle restant $\alpha\beta\varepsilon$ est équivalent au triangle restant $\alpha\eta\zeta$. Mais le triangle $\alpha\beta\varepsilon$ est équivalent au triangle $\alpha\gamma\delta$, et par conséquent aussi le triangle $\alpha\gamma\delta$ au triangle $\alpha\zeta\eta$. Soit ajouté à l'un et à l'autre le triangle $\alpha\gamma\eta$. Le triangle total $\gamma\delta\eta$ est équivalent au triangle total $\gamma\zeta\eta$, et ils ont la même base $\gamma\eta$. Donc $\gamma\eta$ est parallèle à $\delta\zeta$.

» IX. — On mène, dans le triangle $\alpha\beta\gamma$, les droites $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, et $\zeta\eta$ parallèle à $\beta\gamma$, et on tire $\varkappa\lambda$. Supposons que l'on ait

$$\beta\vartheta : \vartheta\gamma :: \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon :$$

» je dis que $\varkappa\lambda$ est parallèle à $\beta\gamma$.



» Puisque l'on a, par hypothese,

$$\beta\vartheta : \vartheta\gamma :: \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon,$$

» il vient, par soustraction,

$$\beta\delta : \gamma\varepsilon :: \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon.$$

» Mais on a

$$\beta\delta : \varepsilon\gamma :: \zeta\mu : \nu\eta \quad \text{et} \quad :: \delta\vartheta : \vartheta\varepsilon;$$

» d'où, par permutation,

$$\zeta\mu : \delta\vartheta :: \nu\eta : \vartheta\varepsilon.$$

» Mais, à cause des parallèles, on a

$$\zeta\mu : \delta\vartheta :: \zeta\varkappa : \varkappa\vartheta \quad \text{et} \quad \eta\nu : \vartheta\varepsilon :: \eta\lambda : \lambda\vartheta,$$

» et par conséquent

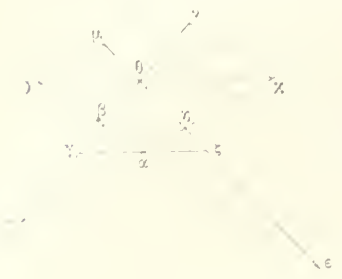
$$\zeta\varkappa : \varkappa\vartheta :: \eta\lambda : \lambda\vartheta.$$

» Donc $\varkappa\lambda$ est parallèle à $\eta\zeta$ et par conséquent aussi à $\gamma\beta$.

» X. — Par un point θ on mène les deux transversales $\delta\theta$, $\theta\varepsilon$ qui » coupent les deux droites $\beta\alpha\varepsilon$, $\delta\alpha\eta$. Supposons que l'on ait

$$\theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta :: \delta\theta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta,$$

» je dis que les trois points γ, α, ζ sont en ligne droite.



» Par le point θ, menons parallèlement » à $\gamma\alpha$ la droite $\kappa\lambda$ qui rencontre $\alpha\delta$, $\alpha\beta$ » en κ, λ. Par le point λ menez parallèlement à $\alpha\delta$ la droite $\lambda\mu$, et soit μ le » point où elle rencontre $\varepsilon\theta$. Par le point κ » menez parallèlement à $\alpha\beta$ la droite $\kappa\nu$, et » soit ν le point où elle rencontre $\delta\theta$. On » a, à cause des parallèles,

$$\delta\theta : \theta\nu :: \delta\gamma : \gamma\beta, \quad \text{d'où} \quad \delta\theta \times \gamma\beta = \delta\gamma \times \theta\nu.$$

» Formons le rectangle $\delta\gamma \times \beta\theta$; on a l'identité

$$\delta\theta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta :: \gamma\delta \times \theta\nu : \delta\gamma \times \beta\theta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \theta\nu : \theta\beta.$$

» Mais, par hypothèse, on a

$$\theta\delta \times \beta\gamma : \delta\gamma \times \beta\theta :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta,$$

» et, à cause des parallèles,

$$\theta\nu : \theta\beta :: \kappa\theta : \theta\lambda, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \eta\theta : \theta\mu, \quad \text{ou} \quad :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\mu \times \zeta\varepsilon.$$

» D'où résulte la proportion

$$\theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\varepsilon \times \zeta\eta :: \theta\eta \times \zeta\varepsilon : \theta\mu \times \zeta\varepsilon.$$

» Donc

$$\theta\varepsilon \times \zeta\eta = \theta\mu \times \zeta\varepsilon,$$

» ce qui donne

$$\theta\mu : \theta\varepsilon :: \eta\zeta : \zeta\varepsilon,$$

» et, par addition et permutation,

$$\mu\varepsilon : \varepsilon\eta :: \theta\varepsilon : \varepsilon\zeta.$$

» Mais on a

$$\mu\varepsilon : \varepsilon\eta :: \lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha,$$

» et par conséquent aussi

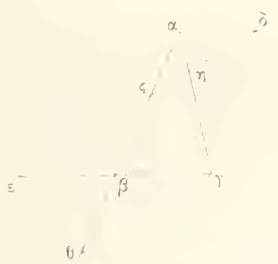
$$\lambda\varepsilon : \varepsilon\alpha :: \theta\varepsilon : \varepsilon\zeta.$$

» Donc $\alpha\zeta$ est parallèle à $\varkappa\lambda$. Or $\gamma\alpha$ l'est aussi. Donc les trois points γ, » α, ζ sont en ligne droite; ce qu'il fallait démontrer.

» Les divers cas sont semblables à ceux précédemment indiqués à » l'occasion du lemme dont celui qui vient d'être démontré est la » réciproque [*].

» XI. — Par le sommet α du triangle $\alpha\beta\gamma$ on mène $\alpha\delta$ parallèle à $\beta\gamma$. » Soit une transversale $\delta\varepsilon$ qui rencontre $\beta\gamma$ en ε. Je dis que l'on a

$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \varepsilon\zeta \times \eta\delta :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$



» Par le point γ, menons parallèlement à » $\delta\varepsilon$ la droite $\gamma\theta$, et soit θ son point de ren- » contre avec $\alpha\beta$. On a ainsi

$$\gamma\alpha : \alpha\eta :: \gamma\theta : \zeta\eta, \quad \text{et} \quad \gamma\alpha : \alpha\eta :: \varepsilon\delta : \delta\eta.$$

» et par conséquent aussi

$$\varepsilon\delta : \delta\eta :: \theta\gamma : \zeta\eta.$$

» Donc

$$\gamma\theta \times \delta\eta = \varepsilon\delta \times \zeta\eta.$$

» Formons le rectangle $\varepsilon\zeta \times \eta\delta$. On a l'identité

$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \delta\eta \times \varepsilon\zeta :: \gamma\theta \times \delta\eta : \delta\eta \times \varepsilon\zeta.$$

» c'est-à-dire

$$:: \gamma\theta : \varepsilon\zeta, \quad \text{ou} \quad :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$

» On a donc

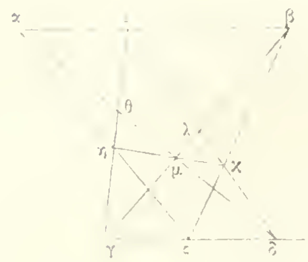
$$\delta\varepsilon \times \zeta\eta : \varepsilon\zeta \times \eta\delta :: \gamma\beta : \beta\varepsilon.$$

» Il en est encore de même lorsque la droite $\alpha\delta$ menée parallèlement » à $\beta\gamma$ est dirigée dans le sens opposé à celui indiqué sur la figure, et » lorsque, partant du point δ, elle est menée hors du triangle, par » exemple du côté du sommet γ, et prolongée (au besoin) au-dessous » de $\beta\gamma$ [**].

[*] Cette dernière phrase, *τὰ δὲ πτωτικὰ αὐτοῦ ὁμοίως τοῖς προγεγραμμένοις, ὧν ἐστιν ἀναστροφίον*, est placée, dans les manuscrits, en tête du lemme suivant; ce qui la rend inintelligible. Elle m'a paru se rapporter aux diverses figures du lemme III, qui est, en effet, la réciproque de la proposition ci-dessus. (*Voir* la note de la page 218.)

[**] Ces dernières indications me paraissent rendre complétement le sens de cette phrase, *Τὰ δ'αὐτὰ κἂν ἐπὶ τὰ ἑτέρα μερη ἀχθῆ ἡ $\overline{\alpha\delta}$ παραλληλος, και ἀπὸ τοῦ $\overline{\delta}$ εκτος, ὡς ἐπι τὸ $\overline{\gamma}$ διὰ τὴν εὐθεῖαν*, qui fait suite à la démonstration ci-dessus.

» XII. — Ceci étant démontré, il faut faire voir que, les droites $\alpha\varepsilon$, » $\gamma\delta$ étant parallèles, et coupées par les couples de transversales $\alpha\delta$, » $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$, si l'on mène $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\gamma$, les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne » droite.



» Car, puisque $\delta\alpha\zeta$ est un triangle, et que » $\alpha\varepsilon$ est parallèle $\delta\zeta$, et que $\varepsilon\gamma$ est une trans- » versale qui rencontre $\delta\zeta$ en γ, on a, par » le lemme qui précède,

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon.$$

» De même, puisque $\gamma\beta\zeta$ est un triangle, et » que $\beta\varepsilon$ est parallèle à $\gamma\zeta$, et que $\delta\varepsilon$ est une » transversale qui rencontre $\gamma\zeta$ en δ, on a

$$\gamma\zeta : \zeta\delta :: \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa : \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon,$$

» et, par inversion,

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon : \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa.$$

» Mais on a déjà

$$\delta\zeta : \zeta\gamma :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon,$$

» et par conséquent

$$\gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \delta\varkappa \times \lambda\varepsilon : \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda.$$

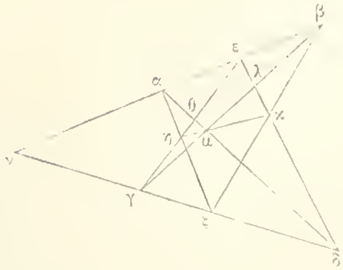
» Or c'est là le cas de l'avant-dernier lemme, car les deux droites $\gamma\mu\lambda$, » $\delta\mu\theta$ sont coupées par les deux transversales $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$, et on a

$$\gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \delta\varkappa \times \varepsilon\lambda : \delta\varepsilon \times \lambda\varkappa.$$

» Donc les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne droite. Cela est en effet » démontré dans le lemme précité.

» XIII. — Mais que les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ ne soient pas parallèles, et

» qu'elles se rencontrent en ν. Je dis que les points η, μ, $\varkappa$ sont encore » en ligne droite.



» Puisque les trois droites $\alpha\nu$, $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$ » sont coupées par les deux transversales » $\gamma\varepsilon$, $\nu\delta$, issues du point γ, on a

$$\gamma\varepsilon \times \theta\eta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \gamma\nu \times \zeta\delta : \nu\delta \times \gamma\zeta.$$

» De même, puisque les trois droites $\beta\nu$, » $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ sont coupées par les deux trans- » versales $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$, issues du point δ, on a

$$\nu\gamma \times \zeta\delta : \nu\delta \times \zeta\gamma :: \delta\varkappa \times \varepsilon\lambda : \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda.$$

» Mais il a été démontré qu'on a

$$\nu\gamma \times \zeta\delta : \nu\delta \times \gamma\zeta :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon.$$

» On a donc aussi

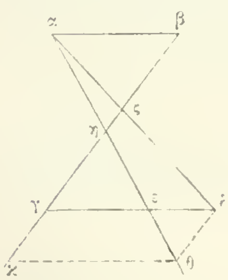
$$\gamma\varepsilon \times \theta\eta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon :: \delta\varkappa \times \varepsilon\lambda : \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda.$$

» De même que dans le cas où $\alpha\beta$ est parallèle à $\gamma\delta$, on conclut, en » vertu du lemme cité, que les trois points η, μ, $\varkappa$ sont en ligne » droite.

» XIV. — $\alpha\beta$ étant parallèle à $\gamma\delta$, on mène les transversales $\alpha\varepsilon$, $\gamma\delta$; » soit ζ un point pris sur $\zeta\eta$, de telle sorte que l'on ait

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \gamma\beta \times \eta\zeta : \zeta\beta \times \gamma\eta.$$

» Je dis que les trois points α, ζ, δ sont en ligne droite.



» Menez par le point δ, parallelement à $\beta\gamma$, la » droite $\delta\theta$, et soit θ le point où elle rencontre » $\alpha\varepsilon$. Par ce point θ, menez $\theta\varkappa$ parallèle à $\gamma\delta$, et » prolongez $\beta\gamma$ jusqu'en $\varkappa$. On a, par hypothèse,

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \gamma\beta \times \zeta\eta : \zeta\beta \times \gamma\eta,$$

» et, par construction,

$$\delta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \delta\theta : \gamma\eta \quad \text{ou} \quad :: \delta\theta \times \beta\zeta : \gamma\eta \times \beta\zeta;$$

» donc

$$\beta\gamma \times \zeta\eta = \delta\theta \times \beta\zeta;$$

» d'où résulte la proportion

$$\gamma\beta : \beta\zeta :: \delta\theta : \zeta\eta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \gamma\kappa : \eta\zeta.$$

» et, par addition,

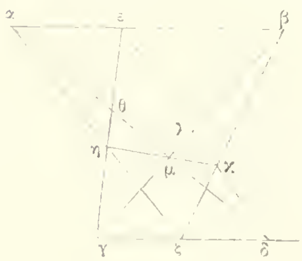
$$\kappa\beta : \beta\eta :: \kappa\gamma : \zeta\eta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\theta : \zeta\eta.$$

» Mais, à cause des parallèles, on a

$$\kappa\beta : \beta\eta :: \theta\alpha : \alpha\eta \quad \text{et aussi} \quad :: \delta\theta : \zeta\eta;$$

» or les droites $\delta\theta$, $\zeta\eta$ sont parallèles, donc les trois points α, ζ, δ sont en ligne droite.

» XV. — Ceci étant démontré, que les paralleles $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ soient coupées par les deux couples de tranversales $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\delta$, et que l'on joigne $\beta\gamma$, $\eta\kappa$, je dis que les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.



» Tirez la droite $\delta\mu$, et prolongez-la jusqu'en θ. Puisque $\beta\varepsilon$ est mené parallèlement à $\gamma\delta$, hors du triangle $\beta\gamma\zeta$ par son sommet β, et que $\varepsilon\delta$ est une transversale, on a

$$\gamma\zeta : \zeta\delta :: \delta\varepsilon \times \kappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \kappa\delta;$$

» mais on a aussi

$$\delta\varepsilon \times \kappa\lambda : \delta\kappa \times \lambda\varepsilon :: \gamma\eta \times \theta\varepsilon : \gamma\varepsilon \times \eta\theta,$$

» puisque $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ sont deux transversales issues du point ε, qui coupent les trois droites $\gamma\lambda$, $\delta\theta$, $\eta\kappa$. On a par conséquent

$$\delta\zeta : \gamma\zeta :: \gamma\varepsilon \times \eta\theta : \gamma\eta \times \theta\varepsilon;$$

» donc les points α, θ, δ sont en ligne droite, en vertu du lemme qui précède. Donc aussi les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.

» XVI. — Les droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ étant coupées par deux transversales $\delta\beta$, $\delta\varepsilon$, issues du point δ, si l'on prend sur ces dernières les points

η, θ, tels que l'on ait

$$\varepsilon\eta \times \zeta\delta : \delta\varepsilon \times \eta\zeta :: \beta\theta \times \gamma\delta : \beta\delta \times \gamma\theta,$$

» je dis que les trois points α, η, θ sont en ligne droite.

» Menez, par le point η, $\varkappa\lambda$ parallèle à » $\beta\delta$. On a, par hypothèse,

$$\varepsilon\eta \times \zeta\delta : \delta\varepsilon \times \zeta\eta :: \beta\theta \times \gamma\delta : \beta\delta \times \gamma\theta ;$$

» or le rapport de $\varepsilon\eta \times \zeta\delta$ à $\delta\varepsilon \times \eta\zeta$ se » compose du rapport de $\eta\varepsilon$ à $\varepsilon\delta$, c'est-à-» dire de $\varkappa\eta$ à $\beta\delta$, et du rapport de $\delta\zeta$ à » $\zeta\eta$, c'est-à-dire de $\gamma\delta$ à $\eta\lambda$, et le rapport » de $\beta\theta \times \gamma\delta$ à $\beta\delta \times \gamma\theta$ se compose du rapport de $\theta\beta$ à $\beta\delta$ et du rap-» port de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Donc le rapport qui se compose de celui de » $\varkappa\eta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\gamma\delta$ à $\eta\lambda$ est le même que le rapport qui » se compose de celui de $\beta\theta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Mais le rap-» port de $\varkappa\eta$ à $\beta\delta$ se compose du rapport de $\varkappa\eta$ à $\beta\theta$ et du rapport de » $\beta\theta$ à $\beta\delta$. Donc le rapport composé de celui de $\varkappa\eta$ à $\beta\theta$ et de celui de » $\beta\theta$ à $\beta\delta$, et encore de celui de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$, est le même que le rapport » qui se compose de celui de $\beta\theta$ à $\beta\delta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$. Soit retranché » de part et d'autre le rapport de $\beta\theta$ à $\beta\delta$. Le rapport restant, com-» posé de celui de $\varkappa\eta$ à $\beta\theta$ et de celui de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$, est par conséquent » le même que celui de $\delta\gamma$ à $\gamma\theta$, c'est-à-dire celui qui se compose du » rapport de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$ et du rapport de $\eta\lambda$ à $\theta\gamma$. Soit retranché encore » le rapport de $\delta\gamma$ à $\eta\lambda$. Le rapport restant de $\varkappa\eta$ à $\beta\theta$ est donc le » même que celui de $\eta\lambda$ à $\theta\gamma$, et on a, par permutation,

$$\varkappa\eta : \eta\lambda :: \beta\theta : \theta\gamma,$$

» et les droites $\varkappa\lambda$, $\beta\gamma$, sont parallèles; donc les trois points α, η, θ » sont en ligne droite [*].

» XVII. — Mais que les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ne soient pas parallèles, et

[*] Ce lemme se confond, quant à l'énoncé, avec le lemme X. La démonstration seule est différente

» qu'elles se rencontrent en ν; je dis que les trois points α, μ, δ sont » encore en ligne droite.

» Les trois droites $\beta\nu$, $\beta\gamma$, $\beta\zeta$ étant cou- » pées par les deux transversales $\delta\varepsilon$, $\delta\nu$, » issues du point δ, on a

$$\nu\delta \times \gamma\zeta : \nu\gamma \times \delta\zeta :: \delta\varepsilon \times \varkappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \varkappa\delta;$$

» mais on a aussi

$$\varepsilon\delta \times \varkappa\lambda : \varepsilon\lambda \times \varkappa\delta :: \varepsilon\theta \times \gamma\eta : \varepsilon\gamma \times \theta\eta,$$

» car les trois droites $\gamma\lambda$, $\delta\theta$, $\eta\varkappa$ sont cou- » pées par les deux transversales $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$, issues du point ε. On a par » conséquent

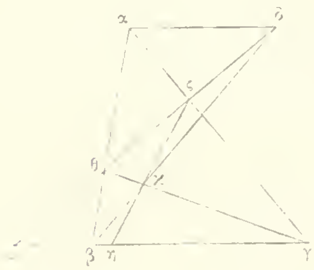
$$\varepsilon\theta \times \gamma\eta : \varepsilon\gamma \times \theta\eta :: \nu\delta \times \gamma\zeta : \nu\gamma \times \delta\zeta.$$

» En vertu du lemme qui précède, les trois points α, θ, δ sont en » ligne droite; donc aussi les trois points α, μ, δ sont en ligne droite.

» XVIII. — Soit le triangle $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha\delta$ parallèle à $\beta\gamma$. Supposons les » droites $\delta\varepsilon$, $\zeta\eta$ menées de telle sorte que l'on ait

$$\overline{\varepsilon\beta}^2 : \varepsilon\gamma \times \gamma\beta :: \beta\eta : \eta\gamma;$$

» joignez $\beta\delta$, je dis que les trois points θ, $\varkappa$, γ sont en ligne droite.



» On a, par hypothèse,

$$\overline{\varepsilon\beta}^2 : \varepsilon\gamma \times \gamma\beta :: \beta\eta : \eta\gamma.$$

» Ajoutons de part et d'autre le rapport de » $\gamma\varepsilon$ à $\varepsilon\beta$, lequel est le même que celui de » $\varepsilon\gamma \times \gamma\beta$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$. Il en résulte que le » rapport de $\overline{\varepsilon\beta}^2$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$, c'est-à-dire de » $\varepsilon\beta$ à $\beta\gamma$, est le même que celui qui se com- » pose du rapport de $\beta\eta$ à $\eta\gamma$ et du rapport de $\varepsilon\beta \times \gamma\beta$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$, le- » quel est le même que celui de $\varepsilon\gamma$ à $\varepsilon\beta$; de sorte que le rapport de » $\overline{\varepsilon\beta}^2$ à $\varepsilon\beta \times \beta\gamma$ se compose du rapport de $\beta\eta$ à $\eta\gamma$ et du rapport de $\varepsilon\gamma$ à » $\varepsilon\beta$, et conséquemment est le même que celui de $\varepsilon\gamma \times \beta\eta$ à $\varepsilon\beta \times \gamma\eta$.

» Mais, en vertu d'un des lemmes précédents, on a

$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \theta\varepsilon \times \delta\zeta : \delta\varepsilon \times \zeta\theta,$$

» et par conséquent

$$\gamma\varepsilon \times \beta\eta : \gamma\eta \times \varepsilon\beta :: \theta\varepsilon \times \delta\zeta : \delta\varepsilon \times \zeta\theta;$$

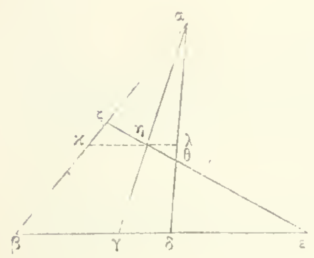
» donc les trois points θ, $\varkappa$, γ sont en ligne droite. Cela est, en effet, » parmi les cas des réciproques précédemment démontrées.

» XIX. — Trois droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, étant coupées par deux transversales $\varepsilon\zeta$, $\varepsilon\beta$, issues du point ε, si l'on a

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \theta\varepsilon : \theta\eta,$$

» je dis que l'on a aussi

$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \varepsilon\delta : \delta\gamma.$$



» Par le point η, menez $\lambda\varkappa$ parallèle à $\beta\varepsilon$.

» On a, par hypothèse,

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\theta : \theta\eta,$$

» et, par construction,

$$\varepsilon\zeta : \zeta\eta :: \varepsilon\beta : \eta\varkappa, \quad \varepsilon\theta : \theta\eta :: \varepsilon\delta : \eta\lambda,$$

» d'où

$$\beta\varepsilon : \eta\varkappa :: \delta\varepsilon : \eta\lambda.$$

» et, par permutation,

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta :: \varkappa\eta : \eta\lambda;$$

» mais on a

$$\varkappa\eta : \eta\lambda :: \beta\gamma : \gamma\delta.$$

» et par conséquent

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\delta :: \beta\gamma : \gamma\delta,$$

» ou, par permutation,

$$\varepsilon\beta : \beta\gamma :: \varepsilon\delta : \delta\gamma.$$

» La proposition se démontre semblablement dans les autres cas.

» XX. — Soient deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, ayant un angle égal, sa-

» voir $\alpha = \delta$; je dis que l'on a

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» Abaissons les perpendiculaires $\beta\eta$, $\varepsilon\theta$. Puisque l'angle α est égal à δ, et η à θ, on a

$$\alpha\beta : \beta\eta :: \delta\varepsilon : \varepsilon\theta;$$

» mais on a les identités

$$\alpha\beta : \beta\eta :: \beta\alpha \times \alpha\gamma : \beta\eta \times \alpha\gamma \quad \text{et} \quad \delta\varepsilon : \varepsilon\theta :: \varepsilon\delta \times \delta\zeta : \varepsilon\theta \times \delta\zeta,$$

» et par conséquent

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \beta\eta \times \alpha\gamma :: \varepsilon\delta \times \delta\zeta : \varepsilon\theta \times \delta\zeta,$$

» et, par permutation,

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \beta\eta \times \alpha\gamma : \varepsilon\theta \times \delta\zeta;$$

» mais les rectangles $\beta\eta \times \alpha\gamma$, $\varepsilon\theta \times \delta\zeta$ sont entre eux comme les aires des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$, car $\beta\eta$, $\varepsilon\theta$ sont respectivement les hauteurs de ces deux triangles. On a donc

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» XXI. — Supposons maintenant que les angles α, δ fassent ensemble deux droits; je dis que l'on a encore

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» Sur le prolongement de $\beta\alpha$, prenez

$$\alpha\eta = \beta\alpha,$$

» et joignez $\gamma\eta$. Puisque les angles α, δ, font ensemble deux droits, et que les angles adjacents $\beta\alpha\gamma$, $\gamma\alpha\eta$, font aussi deux droits, $\gamma\alpha\eta$ est égal à δ. On a par conséquent

$$\eta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\eta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\zeta;$$

» mais $\eta\alpha$ étant égal à $\alpha\beta$, les triangles $\eta\alpha\gamma$, $\alpha\beta\gamma$ sont équivalents
» Donc on a

$$\beta\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\delta \times \delta\zeta :: \text{l'aire du triangle } \alpha\beta\gamma : \text{l'aire du triangle } \delta\varepsilon\zeta.$$

» XXII. — Soient quatre points α, γ, δ, β, en ligne droite; supposons que l'on ait

$$2 . \alpha\beta \times \gamma\delta = \overline{\gamma\beta}^2 .$$

» je dis que l'on a

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{\alpha\gamma}^2 + \overline{\delta\beta}^2 ;$$

» car, puisque, par hypothèse,

$$2 \alpha\beta \times \gamma\delta = \overline{\gamma\beta}^2 .$$

» si l'on retranche de part et d'autre $2 \beta\delta \times \delta\gamma$, il vient

$$2 \alpha\delta \times \delta\gamma = \overline{\gamma\delta}^2 + \overline{\delta\beta}^2 ;$$

» soit encore retranché de part et d'autre $\overline{\gamma\delta}^2$, il en résulte

$$2 \alpha\gamma \times \gamma\delta + \overline{\gamma\delta}^2 = \overline{\delta\beta}^2 .$$

» Ajoutant enfin $\overline{\alpha\gamma}^2$, il vient

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{\alpha\gamma}^2 + \overline{\delta\beta}^2 .$$

» XXIII. — Soit $\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2$, je dis que l'on a ces trois relations :

$$(\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\delta = \alpha\delta \times \delta\gamma, \quad (\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\gamma = \overline{\delta\gamma}^2, \quad (\alpha\delta + \delta\gamma) \times \beta\alpha = \overline{\alpha\delta}^2 .$$

» Car, puisque l'on suppose

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2,$$

» on a la proportion

$$\alpha\beta : \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma, \quad \text{d'où} \quad \alpha\delta : \beta\delta :: \gamma\delta : \beta\gamma,$$

» puis, par inversion et addition,

$$\gamma\delta + \delta\alpha : \delta\alpha :: \gamma\delta : \delta\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta + \delta\gamma)\times\beta\delta = \alpha\delta\times\delta\gamma.$$

» La proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma$ donne ensuite, par addition,

$$\alpha\delta + \delta\gamma : \delta\gamma :: \delta\gamma : \gamma\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta + \delta\gamma)\times\gamma\beta = \overline{\delta\gamma}^2.$$

» Enfin de la proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\beta : \beta\delta$, on tire, par inversion et » addition,

$$\gamma\delta + \delta\alpha : \delta\alpha :: \delta\alpha : \alpha\beta;$$

» donc

$$(\alpha\delta + \delta\gamma)\times\alpha\beta = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» XXIV. — Soient quatre points α, γ, δ, β, en ligne droite. Sup» posons que l'on ait

$$\overline{\gamma\delta}^2 = 2\,.\,\alpha\gamma\times\delta\beta;$$

» je dis que l'on a aussi

$$\overline{\alpha\beta}^2 = \overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\gamma\beta}^2.$$

» Car de l'hypothèse

$$\overline{\gamma\delta}^2 = 2\,.\,\alpha\gamma\times\delta\beta,$$

» il résulte l'égalité

$$2\,.\,\alpha\gamma\times\gamma\beta = \overline{\gamma\delta}^2 + 2\,.\,\alpha\gamma\times\gamma\delta.$$

» Ajoutant de part et d'autre $\overline{\alpha\gamma}^2$, il vient

$$2\,.\,\alpha\gamma\times\gamma\beta + \overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\alpha\delta}^2;$$

» ajoutant encore $\overline{\beta\gamma}^2$, on a enfin

$$\overline{\alpha\beta}^2 = \overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\gamma\beta}^2.$$

» XXV. — Soit $\alpha\beta\times\beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2$; je dis que l'on a ces trois relations :

$$(\alpha\delta - \delta\gamma)\times\beta\delta = \alpha\delta\times\delta\gamma,\quad (\alpha\delta - \delta\gamma)\times\gamma\beta = \overline{\delta\gamma}^2,\quad (\alpha\delta - \delta\gamma)\times\beta\alpha = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» Car l'hypothèse donne la proportion

$$\alpha\beta : \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma,$$

» d'où, par soustraction,

$$\alpha\delta : 6\delta :: \delta\gamma : 6\gamma.$$

» Permutant et soustrayant de nouveau, il vient

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma :: \alpha\delta : \delta 6;$$

» donc

$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times \delta 6 = \alpha\delta \times \delta\gamma.$$

» La proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \delta 6 : 6\gamma$ donne, par soustraction,

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \delta\gamma :: \delta\gamma : \gamma 6;$$

» donc

$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times 6\gamma = \overline{\delta\gamma}^2.$$

» Enfin, de la proportion $\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha 6 : 6\delta$, on tire, par inversion et » soustraction,

$$\alpha\delta - \delta\gamma : \alpha\delta :: \alpha\delta : \alpha 6;$$

» donc

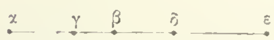
$$(\alpha\delta - \delta\gamma) \times \alpha 6 = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» XXVI. — Supposons que l'on ait

$$\alpha 6 : 6\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2,$$

» je dis que l'on a aussi

$$\alpha 6 \times 6\gamma = \overline{6\delta}^2.$$



» Prenons $\delta\varepsilon = \gamma\delta$, on a, par cette construction,

$$\varepsilon\alpha \times \alpha\gamma + \overline{\gamma\delta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma + \gamma\delta \times \delta\varepsilon = \overline{\alpha\delta}^2.$$

» D'après cela, la proportion $\alpha 6 : 6\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2$ donne, par soustraction,

$$\alpha\gamma : \gamma 6 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma : \varepsilon\alpha \times 6\gamma :: \varepsilon\alpha \times \alpha\gamma : \gamma\delta \times \delta\varepsilon;$$

» donc

$$\alpha\varepsilon \times 6\gamma = \gamma\delta \times \delta\varepsilon.$$

» De là une nouvelle proportion, de laquelle on tire, par soustraction,

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\delta - \beta\delta \quad \text{ou} \quad \alpha\beta : \delta\gamma - \beta\gamma \quad \text{ou} \quad \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» XXVII. — Soit encore $\alpha\beta : \beta\gamma :: \overline{\alpha\delta}^2 : \overline{\delta\gamma}^2$, je dis que l'on a aussi

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» Prenons, comme ci-dessus,

$$\delta\varepsilon = \gamma\delta,$$

» il en résulte

$$\gamma\alpha \times \alpha\varepsilon + \overline{\gamma\delta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon + \varepsilon\delta \times \delta\gamma = \overline{\alpha\delta}^2,$$

» et la proportion que nous supposons avoir lieu donne, par soustraction,

$$\alpha\gamma : \gamma\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon : \varepsilon\alpha \times \gamma\beta :: \gamma\alpha \times \alpha\varepsilon : \varepsilon\delta \times \delta\gamma;$$

» donc

$$\alpha\varepsilon \times \gamma\beta = \varepsilon\delta \times \delta\gamma.$$

» De là une nouvelle proportion, de laquelle on tire, par addition,

$$\alpha\delta : \delta\varepsilon \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta\gamma :: \delta\beta : \beta\gamma,$$

» et

$$\alpha\delta + \delta\beta \quad \text{ou} \quad \alpha\beta : \delta\gamma + \gamma\beta \quad \text{ou} \quad \beta\delta :: \beta\delta : \beta\gamma;$$

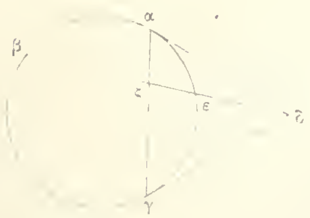
» donc

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \overline{\beta\delta}^2.$$

» XXVIII. — Les droites $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, touchant le cercle $\alpha\beta\gamma$, joignez $\alpha\gamma$,

» et menez à volonté la sécante $\delta\beta$; je dis que l'on a

$$\beta\delta : \delta\varepsilon :: \beta\zeta : \zeta\varepsilon.$$



» De ce que l'on a

$$\alpha\delta = \delta\gamma,$$

» il résulte

$$\alpha\zeta \times \zeta\gamma + \overline{\zeta\delta}^2 = \overline{\delta\alpha}^2;$$

» mais

$$\alpha\zeta \times \zeta\gamma = \beta\zeta \times \zeta\varepsilon:$$

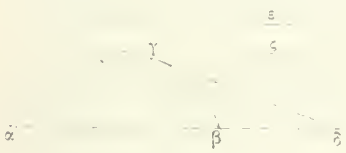
» donc

$$\beta\zeta \times \zeta\varepsilon + \overline{\delta\zeta}^2 = \beta\delta \times \delta\varepsilon.$$

» Cela étant, il s'ensuit la proportion

$$\beta\delta : \delta\varepsilon :: \beta\zeta : \zeta\varepsilon \; [*].$$

» XXIX. — Un segment de cercle étant décrit sur $\alpha\beta$, y inscrire un » angle $\alpha\gamma\beta$ dont les côtés soient entre eux dans un rapport donné.



» Supposons le problème résolu, et » menons par le point γ la tangente $\gamma\delta$, » on a

$$\overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\beta\gamma}^2 :: \alpha\delta : \delta\beta:$$

» or le rapport de $\alpha\gamma$ à $\beta\gamma$ est donné, ainsi que les deux points α, β : » donc δ est donné, et par conséquent aussi $\beta\delta$.

» Ce problème se construira de cette manière :

» Soit $\alpha\gamma\beta$ le segment donné. Supposons que les deux cordes doi- » vent être entre elles comme les longueurs ε, ζ. Soit déterminé le point » δ par la condition de satisfaire à la proportion

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \alpha\delta : \beta\delta.$$

» Par ce point, menez la tangente $\delta\gamma$, et joignez $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$. Je dis que » ces droites résolvent la question. En effet, on a, d'après cette con-

[*] Cette démonstration est tellement abrégée, que Commandin ne l'a pas comprise. Il a cru que la sécante $\delta\beta$ devait nécessairement passer par le centre; du moins il n'a démontré la proposition que pour ce cas particulier.

» struction,

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \alpha\delta : \delta\beta;$$

» mais on a aussi

$$\alpha\delta : \delta\beta :: \overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\gamma\beta}^2,$$

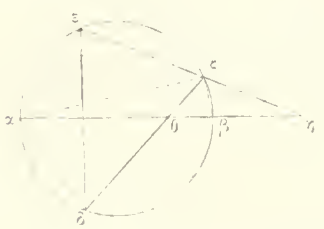
» puisque $\delta\gamma$ est une tangente; il vient par conséquent

$$\varepsilon^2 : \zeta^2 :: \overline{\alpha\gamma}^2 : \overline{\gamma\beta}^2, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon : \zeta :: \alpha\gamma : \gamma\beta:$$

» donc l'angle $\alpha\gamma\beta$ résout le problème proposé.

» XXX. — Soit un cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Du point » quelconque δ, abaissez sur ce diamètre la perpendiculaire $\delta\varepsilon$. Par le » même point, faites passer une corde quelconque $\delta\zeta$. Joignez $\varepsilon\zeta$, et » soit η le point où cette droite prolongée rencontre le diamètre $\alpha\beta$: » je dis que l'on a

$$\alpha\eta : \eta\beta :: \alpha\theta : \theta\beta.$$



» Joignez $\delta\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\alpha\zeta$, $\zeta\beta$. Puisque $\delta\varepsilon$ » est perpendiculaire au diamètre $\alpha\beta$, » les deux angles $\delta\alpha\beta$, $\beta\alpha\varepsilon$, sont égaux » entre eux. Or, d'une part, l'angle $\delta\alpha\beta$ » est égal à $\theta\zeta\beta$, comme étant inscrit » dans un même segment. D'un autre » côté, l'angle $\beta\alpha\varepsilon$ est égal à l'angle $\beta\zeta\eta$, » extérieur au quadrilatère $\alpha\beta\zeta\varepsilon$. Par conséquent les angles $\theta\zeta\beta$, $\beta\zeta\eta$ » sont égaux, et comme l'angle $\alpha\zeta\beta$ est droit, il résulte d'un lemme » connu que l'on a

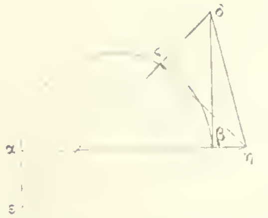
$$\alpha\eta : \eta\beta :: \alpha\theta : \theta\beta \, [*].$$

» XXXI. — Soit un demi-cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. » Élevons en α, β, les perpendiculaires $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$, et traçons à volonté la » transversale $\delta\varepsilon$. Par le point ζ, menons à cette transversale la per- » pendiculaire $\zeta\eta$, et soit η le point où elle rencontre $\alpha\beta$. Je dis que

[*] Le lemme sur lequel Pappus s'appuie à la fin de cette démonstration est la réciproque de la proposition LII du VI^e livre des *Collections mathématiques*.

» l'on a

$$\alpha\varepsilon \times \beta\delta = \alpha\eta \times \eta\beta.$$



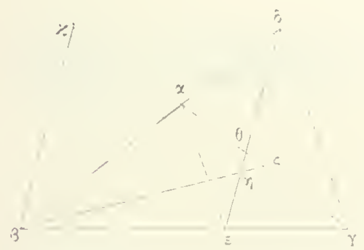
» Car, supposant la chose vraie, il en résulte » que l'on a

$$\varepsilon\alpha : \alpha\eta :: \eta\beta : \beta\delta\,;$$

» que par conséquent les triangles $\varepsilon\alpha\eta$, $\eta\beta\delta$ » ont un angle égal, savoir $\alpha = \beta$, compris » entre côtés proportionnels; que par conséquent encore les angles $\alpha\eta\varepsilon$, $\beta\delta\eta$ sont égaux entre eux. Or les » angles $\alpha\eta\varepsilon$, $\alpha\zeta\varepsilon$ sont égaux, comme étant inscrits dans un même » segment [de la circonférence décrite sur $\varepsilon\eta$ comme diamètre]; de » même les angles $\beta\delta\eta$, $\beta\zeta\eta$ sont égaux, comme inscrits dans un même » segment [de la circonférence décrite sur $\eta\delta$ comme diamètre]. Il » s'ensuit donc que les angles $\alpha\zeta\varepsilon$, $\beta\zeta\eta$ sont égaux. Or cela est, car » les angles $\alpha\zeta\beta$, $\varepsilon\zeta\eta$ sont l'un et l'autre droits. Donc, etc. [*].

» XXXII. — Supposons que les côtés $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ du triangle $\alpha\beta\gamma$ soient » égaux. Sur le prolongement de $\alpha\beta$, prenons à volonté un point δ, et » par ce point menons une droite $\delta\varepsilon$ de telle façon que le triangle $\beta\delta\varepsilon$ » soit équivalent au triangle $\alpha\beta\gamma$. Je dis que si la droite $\beta\zeta$ partage en » deux parties égales l'un des côtés égaux du triangle, savoir celui » qui est dans l'angle opposé à $\delta\varepsilon$, on a la proportion

$$\zeta\beta + \beta\eta : \zeta\eta :: \overline{\alpha\zeta}^2 : \overline{\zeta\theta}^2.$$



» Par le point β, menons parallèlement à $\delta\varepsilon$ la droite $\beta\varkappa$, et soit $\varkappa$ le » point où elle rencontre le prolongement de $\alpha\gamma$. Prenant pour vrai » ce qu'il faut démontrer, il en résulte

[*] Commandin donne dans sa version une seconde démonstration, mais elle manque dans les manuscrits nos 2368 et 2440 de la Bibliothèque Impériale. C'est une démonstration synthétique.

» que l'on a

$$\zeta\varkappa + \varkappa\theta : \zeta\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\zeta\varkappa + \varkappa\theta) \times \zeta\theta : \overline{\zeta\theta}^2 :: \overline{\alpha\zeta}^2 : \overline{\zeta\theta}^2.$$

» d'où

$$(\zeta\varkappa + \varkappa\theta) \times \zeta\theta \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overline{\zeta\varkappa}^2 - \overline{\varkappa\theta}^2 = \overline{\alpha\zeta}^2,$$

» et par conséquent

$$\overline{\varkappa\zeta}^2 - \overline{\zeta\alpha}^2 = \overline{\varkappa\theta}^2;$$

» or on a

$$\overline{\varkappa\zeta}^2 - \overline{\zeta\alpha}^2 = \gamma\varkappa \times \varkappa\alpha.$$

» Donc

$$\gamma\varkappa \times \varkappa\alpha = \overline{\theta\varkappa}^2,$$

» ce qui donne la proportion

$$\gamma\varkappa : \varkappa\theta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \gamma\beta : \beta\varepsilon :: \varkappa\theta : \varkappa\alpha, \quad \text{c'est-à-dire} \quad :: \delta\beta : \delta\alpha.$$

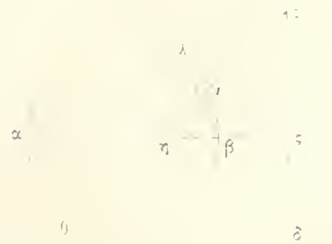
» Or cette proportion est vraie, car $\alpha\varepsilon$ est parallèle à $\delta\gamma$. En effet, » les triangles $\delta\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ étant équivalents, si l'on retranche la partie » commune $\alpha\beta\varepsilon$, il reste deux triangles $\delta\alpha\varepsilon$, $\alpha\gamma\varepsilon$ qui sont équivalents » et ont même base. Donc, etc.

» XXXIII. — Soit un cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Supposons que ce diamètre prolongé soit perpendiculaire à $\delta\varepsilon$, et déterminons le point η de manière que l'on ait

$$\overline{\zeta\eta}^2 = \alpha\zeta \times \zeta\beta.$$

» Je dis que si l'on prend sur $\delta\varepsilon$ un point quelconque ε et que de ce » point on mène la sécante $\varepsilon\eta$ qui rencontre la circonférence en $\varkappa$, θ, » on a

$$\theta\varepsilon \times \varepsilon\varkappa = \overline{\varepsilon\eta}^2.$$



» Joignez $\alpha\varepsilon$, $\beta\lambda$, l'angle λ est droit ainsi
» que ζ, d'où il résulte que l'on a

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2 \text{ [*]}.$$

» Mais

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \theta\varepsilon \times \varepsilon\kappa.$$

» et

$$\alpha\zeta \times \zeta\beta = \overline{\zeta\eta}^2.$$

» Donc

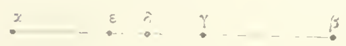
$$\theta\varepsilon \times \varepsilon\kappa = \overline{\varepsilon\zeta}^2 + \overline{\zeta\eta}^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \overline{\varepsilon\eta}^2.$$

» XXXIV. — Supposons que l'on ait la proportion

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma.$$

» et que ε soit le milieu de $\alpha\gamma$, je dis que l'on a ces trois relations :

$$\beta\varepsilon \times \varepsilon\delta = \overline{\varepsilon\gamma}^2, \quad \beta\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma, \quad \alpha\beta \times \beta\gamma = \varepsilon\beta \times \beta\delta.$$



» La proportion

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma$$

» donne, par addition et en prenant ensuite la moitié de chaque an-
» técédent, puis par conversion,

$$\beta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta;$$

» donc

$$\beta\varepsilon \times \varepsilon\delta = \overline{\varepsilon\gamma}^2.$$

---

[*] L'égalité

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2$$

est facile à obtenir. En effet, les triangles semblables $\alpha\beta\lambda$, $\alpha\varepsilon\zeta$ donnent

$$\alpha\varepsilon \times \alpha\lambda = \alpha\beta \times \alpha\zeta,$$

mais

$$\overline{\alpha\varepsilon}^2 = \overline{\alpha\zeta}^2 + \overline{\zeta\varepsilon}^2.$$

De cette égalité, retranchons la précédente, il vient

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\lambda = \alpha\zeta \times \zeta\beta + \overline{\zeta\varepsilon}^2.$$

» En second lieu, retranchons $\overline{\delta\varepsilon}^2$ de chacun des deux membres de
» cette égalité, il vient

$$\beta\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma.$$

» Enfin retranchons de $\overline{\beta\varepsilon}^2$ chacun des deux membres de la même
» égalité, il vient

$$\alpha\beta \times \beta\gamma = \varepsilon\beta \times \beta\delta.$$

» Supposons maintenant que l'on ait

$$\beta\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma,$$

» et que ε soit le milieu de $\gamma\alpha$. Je dis que l'on a

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma.$$

» En effet, à chacun des membres de l'égalité $\beta\delta \times \delta\varepsilon = \alpha\delta \times \delta\gamma$,
» ajoutons $\overline{\delta\varepsilon}^3$. Il en résulte

$$\beta\varepsilon \,.\, \varepsilon\delta = \overline{\gamma\varepsilon}^2,$$

» d'où la proportion

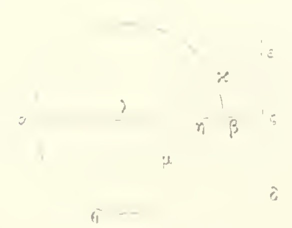
$$\beta\varepsilon : \varepsilon\gamma :: \varepsilon\gamma : \varepsilon\delta,$$

» et, par des opérations inverses de celles qui ont servi à l'obtenir ci-
» dessus, il vient

$$\alpha\beta : \beta\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma.$$

» XXV. — Cela étant, soit un cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre.
» Supposons que ce diamètre prolongé soit perpendiculaire à une
» droite quelconque $\delta\varepsilon$, et déterminons le point η de manière que l'on
» ait

$$\alpha\zeta : \zeta\beta :: \alpha\eta : \eta\beta.$$



» Je dis que si l'on prend à volonté sur $\delta\varepsilon$ un
» point ε et que l'on mène la sécante $\varepsilon\eta$ qui
» rencontre la circonférence en $\varkappa$, θ, on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\varkappa :: \theta\eta : \eta\varkappa.$$

» Soit λ le centre du cercle. De ce point
» abaissez $\lambda\mu$ perpendiculaire sur $\varepsilon\theta$. Le pied
» μ de cette perpendiculaire est le milieu de $\varkappa\theta$. Chacun des angles μ,

» ζ étant un angle droit, les quatre points ε, ζ, λ, μ sont sur une cir-
» conférence de cercle, d'où il résulte que l'on a

$$\zeta\eta \times \eta\lambda = \varepsilon\eta \times \eta\mu, \quad \text{c'est-à-dire} \quad = \alpha\eta \times \eta\beta,$$

» puisque l'on a, par hypothèse,

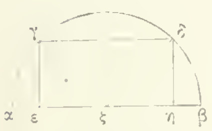
$$\alpha\zeta : \zeta\beta :: \alpha\eta . \eta\beta$$

» et que λ est le milieu de $\alpha\beta$ [*]; ou encore $= \theta\eta \times \eta\varkappa$, $\alpha\beta$, $\varkappa\theta$ étant
» deux droites inscrites dans un même cercle. Mais le point μ est le
» milieu de $\theta\varkappa$: donc, en vertu du lemme qui précède, on a

$$\theta\varepsilon : \varepsilon\varkappa :: \theta\eta : \eta\varkappa.$$

» XXXVI. — Soit une demi-circonférence décrite sur $\alpha\beta$ comme dia-
» mètre, et $\gamma\delta$ une corde parallèle à ce diamètre. Abaissons les perpen-
» diculaires $\gamma\varepsilon$, $\delta\eta$, je dis que l'on a

$$\alpha\varepsilon = \eta\beta.$$



» Soit ζ le centre, joignez $\gamma\zeta$, $\zeta\delta$. On a

$$\gamma\zeta = \zeta\delta$$

» et, par suite,

$$\overline{\gamma\zeta}^2 = \overline{\zeta\delta}^2.$$

» Mais

$$\overline{\gamma\zeta}^2 = \overline{\gamma\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\zeta}^2 \quad \text{et} \quad \overline{\delta\zeta}^2 = \overline{\delta\eta}^2 + \overline{\eta\zeta}^2,$$

» d'où

$$\overline{\gamma\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\zeta}^2 = \overline{\zeta\eta}^2 + \overline{\eta\delta}^2.$$

» Or

$$\overline{\gamma\varepsilon}^2 = \overline{\delta\eta}^2.$$

» Il reste par conséquent

$$\overline{\varepsilon\zeta}^2 = \overline{\zeta\eta}^2, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon\zeta = \zeta\eta.$$

» Mais

$$\alpha\varepsilon + \varepsilon\zeta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha\zeta = \zeta\eta + \varepsilon\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \zeta\beta.$$

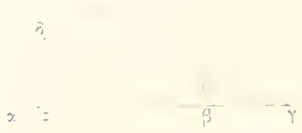
[*] En vertu de la dernière partie du lemme qui précède.

» Donc

$$\alpha\varepsilon = \eta\beta.$$

» XXXVII. — Soit une demi-circonférence décrite sur $\alpha\beta$ comme » diamètre. Du point quelconque γ menons $\gamma\delta$ et abaissons la perpen- » diculaire $\delta\varepsilon$. Je dis que l'on a

$$\overline{\alpha\gamma}^2 - \overline{\gamma\delta}^2 = (\alpha\gamma + \gamma\beta) \times \alpha\varepsilon.$$



» Prenant la chose pour vraie, et rempla- » çant $\overline{\gamma\delta}^2$ par $\overline{\delta\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\gamma}^2$, il faut que l'on ait, » par suite,

$$\overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\delta\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon\gamma}^2 + (\alpha\gamma + \gamma\beta) \times \alpha\varepsilon;$$

» que conséquemment retranchant de part et d'autre $\gamma\alpha \times \alpha\varepsilon$ et rem- » plaçant $\overline{\delta\varepsilon}^2$ par $\alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta$, il vienne

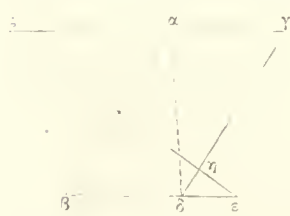
$$\alpha\gamma \times \gamma\varepsilon = \alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta + \overline{\gamma\varepsilon}^2 + \alpha\varepsilon \times \gamma\beta;$$

» que retranchant encore $\overline{\gamma\varepsilon}^2$, on ait

$$\alpha\varepsilon \times \varepsilon\gamma = \alpha\varepsilon \times \varepsilon\beta + \alpha\varepsilon \times \beta\gamma.$$

» Or cela est, donc, etc. [*].

» XXXVIII. — Étant donné un parallélogramme $\alpha\delta$, mener par le » point donné ε la transversale $\varepsilon\zeta$, de telle façon que le triangle $\zeta\gamma\eta$ soit » équivalent au parallélogramme $\alpha\delta$.



» Supposons le problème résolu. Le » triangle $\zeta\gamma\eta$ étant par hypothèse équiva- » lent au parallélogramme $\alpha\delta$, et ce paral- » lélogramme étant lui-même égal à deux » fois le triangle $\alpha\gamma\delta$, on en conclut que » le triangle $\zeta\gamma\eta$ équivaut au double du » triangle $\alpha\gamma\delta$. Mais ces deux triangles » ayant un angle égal γ, sont entre eux comme les rectangles $\zeta\gamma \times \gamma\eta$,

[*] D'après les manuscrits nos 2368 et 2440, ce lemme serait le dernier de ceux qui se rapportent aux Porismes d'Euclide, et le suivant se rapporterait aux sections coniques.

» $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ qui comprennent cet angle. Or $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ est donné, donc
» $\zeta\gamma \times \gamma\eta$ est aussi donné : de sorte que l'on a mené par le point
» donné ε la droite $\varepsilon\zeta$ de manière à intercepter sur les deux droites $\alpha\gamma$,
» $\gamma\delta$ deux segments dont le rectangle est donné. Donc cette droite
» est donnée de position.

» Ce problème se construira comme il suit. Soient $\alpha\delta$, ε, le parallélo-
» gramme et le point donnés. Faites passer par ce dernier une droite $\varepsilon\zeta$
» qui détermine sur les côtés de l'angle $\zeta\gamma\eta$ des segments $\zeta\gamma$, $\gamma\eta$ tels.
» que le rectangle $\zeta\gamma \times \gamma\eta$ soit égal à un rectangle donné double de
» $\alpha\gamma \times \gamma\delta$ [*]. De même que dans l'analyse, nous montrerons que
» le triangle $\zeta\gamma\eta$ ainsi construit est équivalent au parallélogramme $\alpha\delta$.
» La droite $\zeta\varepsilon$ résout donc le problème, et il est clair qu'elle est la seule
» qui le résolve, puisque cette droite elle-même est unique.

§ III. — *Passages extraits de Proclus.*

Le Traité des Porismes est cité dans les deux passages ci-après où il faut prendre garde qu'il s'agit aussi des *corollaires* qu'Euclide, dans les *Eléments*, désigne par le terme πόρισμα.

« ... *Porisme* [**] se dit de certains problèmes tels que les Porismes
» d'Euclide; mais il se dit plus particulièrement lorsque, de la dé-
» monstration d'un théorème il en surgit quelque autre que nous n'a-
» vons pas énoncé, et que pour cela on a appelé *porisme*; lequel est
» comme un gain fait en dehors de l'objet de la démonstration.... »

« ... *Porisme* [***] est un terme de géométrie. Il a une double accep-
» tion; car on appelle porismes et ces théorèmes qui se présentent

[*] L'auteur se réfère sans doute au Traité d'Apollonius, de la *Section de l'espace*, περὶ χωρίου ἀποτομῆς, qui était consacré à la solution de problèmes de ce genre.

[**] ... Τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινων, οἷον τὰ Εὐκλείδει γεγραμμένα πορίσματα. Λέγεται δὲ ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλό τι συναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασι ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. (*Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, page 58.)

[***] ... Ἕν τι τῶν γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πόρισμα. Τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν. Καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν οἷον ἕρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρῄζει, καὶ οὔτε γενέσεως μόνης καὶ θεωρίας ἁπλῆς: ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δεῖ, καὶ ὄντων

» dans la démonstration d'autres théorèmes comme une heureuse » trouvaille et un gain dont on profite chemin faisant, et ces choses » que l'on recherche et dont la découverte exige de l'invention et non » pas seulement une simple déduction ou un raisonnement facile. » L'égalité des angles à la base d'un triangle isoscèle est l'objet d'un » théorème, et telle est la connaissance que nous avons des choses » qui *sont*. Partager un angle en deux parties égales ou construire » un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, toutes » ces choses se réduisent à quelque opération. Mais un cercle étant » donné, en trouver le centre, ou bien deux grandeurs commensura- » bles étant données, en trouver la plus grande commune mesure, et » autres choses telles, tiennent en quelque sorte le milieu entre les » problèmes et les théorèmes, car ces questions se résolvent non par » simple déduction, mais par invention et non par un raisonnement » exempt de difficulté. Il faut découvrir la chose demandée, et la » rendre évidente par une construction. Tels sont les Porismes qu'Eu- » clide a donnés dans les livres de problèmes qu'il a composés. Mais » ne nous arrêtons point à parler de ces porismes là.... »

On ne trouve aucun autre géomètre qui fasse mention des Porismes d'Euclide. Toutefois Diophante paraît faire allusion, dans plusieurs de ses questions arithmétiques, à des porismes *sur les nombres*. Son commentateur, Bachet de Meziriac, a cherché à les rétablir [*].

§ IX. — *Observations sur les documents qui précèdent.*

C'est dans la préface du VII^e livre des *Collections mathématiques* de Pappus, que se trouve la Notice sur les Porismes. Ce VII^e livre est consacré au *lieu résolu* (τόπος ἀναλυόμενος), dont Pappus explique l'objet comme il suit :

« Ce que l'on appelle le *lieu résolu*, ô mon fils Hermodore, est,

---

δὴ τῶν πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις· τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι, ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποίησίν τινος ἀπαιτεῖ, τοῦ δὲ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοθέντων συμμέτρων μεγεθῶν, τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιαδε, μεταξύ πως ἐστὶ προβλημάτων καὶ θεωρημάτων. Οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητουμένων, ἀλλ' εὑρέσεις οὔτε θεωρία ψιλή. Δεῖ γὰρ ὑπ' ὄψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὀμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον. Τοιαῦτα ἄρα ἐστὶ καὶ ὅσα πορίσματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημάτων συντάξας. Ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων πορισμάτων παρεῖσθω λέγειν (*Ibid.*, page 80.)

[*] *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex*; in-f°; Paris, 1621.

» dans son ensemble, une matière à l'usage de ceux qui, après avoir
» étudié les éléments de la géométrie, veulent encore se mettre en état
» de résoudre les problèmes qui peuvent leur être proposés; c'est là
» son utilité. Il se compose d'écrits dus à trois géomètres : Euclide
» l'auteur des *Éléments*, Apollonius de Perge et Aristée l'Ancien. On y
» procède par voie d'analyse et de synthèse....

» Voici la liste de ces écrits dont se compose, comme nous l'avons
» dit, le *lieu résolu* : d'Euclide, un livre des *Données*; d'Apollonius,
» deux livres de la *Section de raison*, deux de la *Section de l'espace*,
» deux de la *Section déterminée*, deux des *Contacts*; d'Euclide, trois
» livres des *Porismes*; d'Apollonius, deux livres des *Inclinaisons*; du
» même, deux livres des *Lieux plans*, huit des *Coniques*; d'Aristée,
» cinq livres des *Lieux solides*; d'Euclide, deux livres des *Lieux à la*
» *surface*; d'Eratosthènes, deux livres des *Moyennes* : en tout trente-
» trois livres, du contenu desquels je te donne ci-après la description
» jusqu'aux *Coniques*, avec le nombre des *Lieux*, des *Diorismes* et
» des divers cas pour chaque livre; et aussi les lemmes à la recherche
» desquels ils ont donné lieu (ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα);
» et je n'ai omis, je crois, aucune question en parlant de ces livres. »

Viennent ensuite les Notices dans lesquelles Pappus consigne les détails promis par lui. Chacune renferme, en effet, outre diverses indications sur le contenu de l'ouvrage auquel elle est consacrée, le nombre des *lieux*, *diorismes*, *maxima* et *minima*, etc., ainsi que celui des *théorèmes* et des *problèmes* dont l'ouvrage se compose, et enfin le nombre des *lemmes* qui s'y rapportent. Cette préface est ainsi en quelque sorte un inventaire des richesses du *lieu résolu*, et cet inventaire doit être considéré comme très-complet si Pappus a eu, comme il le dit, le soin de n'omettre aucune des questions traitées dans tous ces écrits dont il rend compte.

Le corps même du VII^e livre des *Collections mathématiques* se compose de lemmes recueillis, selon toute vraisemblance, dans les écrits des géomètres qui avaient commenté les Traités du *lieu résolu*. Cette diversité d'origine se reconnaît à des différences dans le style et dans les moyens de démonstration. L'identité des lemmes X et XVI, qui ne sont qu'une même proposition démontrée de deux manières différentes, en est une autre preuve. Enfin certaines notions, par exemple celle de la génération des trois sections coniques au moyen du foyer et de la directrice, qui est nettement formulée dans le dernier lemme du VIIe livre, et qui n'a point été indiquée par Apollonius dans son grand ouvrage, prouvent que ces lemmes appartiennent à une géométrie plus récente que celle d'Euclide et d'Apollonius. Plusieurs de ces propositions peuvent avoir eu pour objet d'introduire de nouveaux principes dans les Porismes.

Les auteurs qui se sont occupés de la divination des Porismes ont naturellement cherché à tirer parti de ces lemmes. Sans doute il en peut sortir de précieuses inductions, mais il faut être très-réservé à cet égard, du moins si l'on en juge par ce qui a lieu relativement aux sections coniques. Sur soixante et dix lemmes qui s'y rapportent, il n'y en a que trois où il soit question de sections coniques.

L'ouvrage de Proclus, duquel j'ai extrait deux passages dans lesquels il est question des deux significations que le terme πόρισμα avait chez les géomètres grecs, est un commentaire très-prolixe du premier livre des *Éléments* d'Euclide. Il est dès lors tout simple que ces passages de Proclus se rapportent en partie aux *corollaires* qu'on trouve à la suite de quelques propositions, et qui sont désignés par ce même terme πόρισμα. Ces propositions y sont en effet nettement caractérisées par la circonstance qu'elles se rencontrent, sans avoir été préalablement énoncées, dans la démonstration d'autres propositions. Cette définition du *corollaire* n'a pas toujours été bien comprise. M. Chasles, la prenant pour une définition des porismes, fait dire à Proclus qu'il s'agit, dans les porismes, « *de l'invention d'une chose que l'on ne* » *recherche et l'on ne considère point pour elle-même* [*] ». Ce que Proclus dit des Porismes d'Euclide ou des porismes en général est bien différent. Toutefois, comme il n'en parle qu'incidemment et n'entre pas dans les détails, la Notice de Pappus est, en réalité, l'unique document d'où l'on puisse espérer de faire sortir avec quelque certitude la vraie notion des porismes.

Le texte de cette Notice nous a été heureusement conservé dans un état tel, qu'on peut facilement en découvrir le sens, même dans la

[*] *Aperçu historique*, page 276. (*Voir* ci-après, page 254, l'opinion de Bouillaud.)

partie où Pappus donne des exemples de porismes. Ces exemples ont fait le désespoir des commentateurs parce qu'ils y cherchaient ce qui n'y était pas, savoir : des énoncés de propositions dans le genre de ceux des théorèmes, c'est-à-dire composés d'une *hypothèse* et d'une *affirmation*. Or Pappus ne donne, à une ou deux exceptions près, que des *affirmations*. On en concluait que le texte était non-seulement corrompu, mais encore rempli de lacunes. Je n'ai pas pu admettre une pareille supposition. Comment croire à une mutilation qui aurait fait disparaître systématiquement l'hypothèse de chaque énoncé, et en aurait laissé subsister l'affirmation? La traduction que j'ai donnée rétablit, je crois, le véritable caractère de ces exemples.

§ V. — *Opinions ou conjectures de divers géomètres sur les Porismes.*

La Notice de Pappus sur les Porismes d'Euclide n'a été connue, en Europe, que vers la fin du XVI^e siècle, par la version latine des *Collections mathématiques*, œuvre posthume de Commandin. Cette publication appela par des détails du plus haut intérêt l'attention sur plusieurs Traités géométriques des Grecs, dont la plupart n'avaient point été retrouvés, et que dès lors on entreprit de rétablir sur les indications de Pappus. Les plus célèbres géomètres travaillèrent à ces restitutions conjecturales ou *divinations*. On chercha naturellement à restituer de même ces Porismes d'Euclide, dont Pappus fait un si grand éloge; mais l'on ne put parvenir à comprendre les explications qu'il donne à ce sujet. Tel a été le commencement de la *question des Porismes*.

Plusieurs géomètres ont écrit sur cette question; d'autres, sans en traiter formellement, ont présenté, sous cette dénomination de *porismes*, certaines propositions qui étaient sans doute destinées à donner une idée de ce que pouvaient être les Porismes d'Euclide. Je vais essayer de faire connaître les plus remarquables de ces essais, en suivant l'ordre des dates.

Porisme d'Alexandre Anderson.

Alexandre Anderson a intitulé *Porisme* un problème où il s'agit de trouver le *lieu* du sommet d'un triangle dont la base est donnée, et dont les deux autres côtés sont entre eux dans un rapport constant [*].

Opinion de Fermat.

On voit dans les Œuvres de Fermat [**] que ce grand géomètre avait cherché à résoudre cette question. L'écrit très-succinct dans lequel il expose sa pensée a pour titre : *La doctrine des Porismes renouvelée et présentée aux géomètres modernes en manière d'introduction* [***]. Ce n'est qu'un simple aperçu de la manière de concevoir les Porismes à laquelle l'auteur avait été conduit. Dans une sorte de préface, il rappelle les restitutions qui ont été faites du lieu résolu, et constate qu'on ne savait pas avant lui ce que c'était qu'un porisme, et qu'on ne s'en doutait même pas [****]. Il donne ensuite les énoncés de cinq propositions qu'il considère comme des porismes, et enfin quelques explications à l'appui de son opinion.

Les idées de Fermat sur les porismes, celles du moins qu'on est autorisé à lui attribuer d'après ces explications, peuvent se résumer

---

[*] *Animadversionis in Franciscum Vietam, à Clemente Cyriaco nuper editæ, brevis* Διακρισις; Paris, 1617; in-4°.

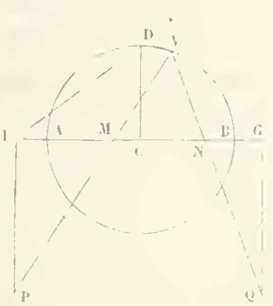
[**] *Varia opera mathematica*; in-folio; Tolosæ, 1679; page 116. Une version française de cet opuscule a été publiée récemment par M. Brassine, dans son *Précis des Œuvres mathématiques de P. Fermat, et de l'Arithmétique de Diophante*; in-8°; Paris, 1853; page 41.

[***] « *Porismatum Euclidæorum renovata doctrina et sub forma isagoges recentioribus geometris exhibita.* »

[****] « Sed supererat tandem intentata ac velut desperata Porismatum Euclidæorum doctrina. Eam... nec superioris nec recentioris ævi geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodo sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, et quâ ratione in hâc materiâ geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem se clara videndam obtulit, et pura per noctem in luce refulsit.... Ut autem clarius se prodat porismatum negotium, celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus easque geometris et considerandas et examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit porisma et cui maxime inserviat usui innotescat.

Cette citation nous montre que l'essai de Fermat avait été adressé par lui confidentiellement aux géomètres. La date de cette communication remonte au moins à l'année 1655; car Bouillaud, dans l'écrit sur les Porismes qu'il a publié en 1657, dit que les propositions de Fermat lui ont été communiquées depuis plus de deux ans.

en peu de mots. Concevons que l'on ait formé une première équation d'un lieu géométrique. Cette équation pourra être transformée d'une infinité de manières, en rapportant le point du lieu, soit à des droites fixes, soit à des points fixes, etc. Ce sont les nouvelles équations ou propositions ainsi obtenues que Fermat appelle des Porismes. Considérons, par exemple, le lieu du point V tel que le quarré de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée AB soit équivalent au rectangle des segments supposés *additifs*, dans lesquels la longueur AB est partagée par cette perpendiculaire. On reconnaît sans peine que le lieu du point V est la circonférence de cercle décrite sur AB comme diamètre. Admettons maintenant que l'on ait transformé la relation qui caractérise ce lieu en une autre relation [*], cette dernière sera un porisme. C'est ainsi que Fermat voit un Porisme dans la proposition que voici :



C *étant le centre du cercle et* CD *le rayon perpendiculaire à* AB, *si par les deux points* F, G, *également distants du centre* C, *on élève sur* AB *les perpendiculaires* FP, GQ, *égales l'une et l'autre à* DF, *et que des deux points* P, Q *on mène à un point quelconque* V *de la circonférence les droites* PV, QV *qui rencontrent le diamètre* AB *en* M, N, *la somme des quarrés des côtés* VM, VN *du triangle* VMN *aura avec l'aire de ce triangle un rapport constant savoir celui de* DF *à* $\frac{\mathrm{CF}}{4}$.

Fermat dit que les indications de Pappus relatives à la définition des Porismes proposée par des géomètres récents l'ont mis sur la voie et lui ont permis de pénétrer ce mystère. Il interprète cette définition en ce sens que les Porismes seraient, pour un lieu géométrique donné,

[*] Lorsque Fermat parle d'un *lieu*, il entend par là une *proposition locale* et en quelque sorte l'*équation* de ce que nous appelons aujourd'hui un *lieu géométrique*. C'est par inadvertance que j'ai attribué à Fermat, dans mon premier Mémoire sur les Porismes, l'idée de transformer les figures elles-mêmes. Passer d'un lieu à un autre, c'est pour Fermat passer de l'équation ou d'une propriété d'un lieu géométrique à une autre équation ou une autre propriété de ce même lieu.

toutes les propositions pouvant servir à caractériser ce lieu, de sorte que les porismes sont, à ce point de vue, les diverses propositions que renferme implicitement une première proposition locale, et qui ne sont pas actuellement énoncées. Il fait remarquer que ces porismes sont susceptibles d'être énoncés comme des théorèmes ou comme des problèmes. Celui qui a été pris tout à l'heure pour exemple, étant ainsi transformé, devient le problème que voici :

AB *étant le diamètre d'un cercle, trouver deux points* P, Q, *tels, que si l'on mène de ces points à un point quelconque* V *de la circonférence les droites* PV, QV, *qui rencontrent respectivement en* M, N *le diamètre* AB, *la somme des quarrés des côtés* VM, VN *du triangle* VMN *soit dans un rapport donné avec l'aire de ce triangle.*

Opinion de Bouillaud.

C'est à l'occasion de l'essai de Fermat sur les porismes que Bouillaud a publié une dissertation sur ce sujet [*]. Il ne partage pas les idées de son illustre contemporain. Dans sa pensée, les Porismes auraient constitué un ordre particulier de propositions auxiliaires, intermédiaires entre les théorèmes et les problèmes. Lorsqu'un problème proprement dit est proposé, et que sa solution se trouve ramenée à dépendre de quelque autre problème, il arrive assez généralement que ce dernier, supposé résolu d'avance, sinon spécialement pour le cas que l'on considère, est susceptible de s'énoncer comme un théorème. Les porismes auraient consisté dans ces propositions d'un caractère ambigu. Bouillaud ne cite que le premier passage de Proclus sur les porismes, ce qui prouve qu'il n'en avait pas compris la véritable signification. Sa dissertation renferme des remarques sur plusieurs parties du texte de Pappus, et notamment sur la première phrase de sa Notice.

Porisme de Schooten.

Schooten a employé le mot Porisme une seule fois, dans ses *Exercices mathématiques* [**], sans indiquer explicitement l'intention d'intervenir dans la question des porismes. Mais l'époque à laquelle il écrivait et

---

[*] *Ismaelis Bullialdi Exercitationes geometricæ tres;* in-4°; Paris, 1657; page 37.

[**] *Francisci a Schooten exercitationum mathematicarum liber V continens sectiones triginta miscellaneæ;* Lugduni Batav., 1657.

la portée réelle de ce qu'il a donné, démontrent suffisamment qu'il s'en préoccupait comme ses contemporains. Il a intitulé *Porisme* la section XXIV de son Recueil. Cette section est entièrement consacrée à montrer *de quelle manière on parvient à découvrir les vérités mathématiques* [*]. Schooten prend pour exemple la figure ci-dessous, et se propose de déterminer les relations qui existent entre ses divers éléments. Dans cette figure, la droite BD est perpendiculaire au diamètre AI du cercle ABCD. H est un point pris sur le prolongement de ce diamètre. Le point C est déterminé par la rencontre de la droite BH et de la circonférence, et le point G par la rencontre de la corde CD avec le diamètre AI. GK est une perpendiculaire à ce diamètre.

Schooten trouve en effet successivement divers théorèmes concernant cette figure. Les uns se traduisent en relations telles que les suivantes :

$$DG \times GC + AE \times EG = DE \times EB + EG \times GL,$$

$$GB : BH :: GC : CH,$$

$$BH : HC :: BM : MC,$$

$$\frac{GB}{BH} = \frac{GC}{CH} = \frac{BG - CG}{BC} = \frac{BG + CG}{BH + HC},$$

$$AG : GB :: GC : GI,$$

$$BM : MC :: \overline{BG}^2 : \overline{GK}^2 \quad \text{ou} \quad :: \overline{GK}^2 : \overline{GC}^2,$$

$$BG \times CG = \overline{GM}^2 + BM \times MC, \text{ etc., etc.};$$

d'autres sont des propriétés descriptives. Par exemple, il démontre que

[**] L'objet de la section XXIV est indiqué comme il suit :

» *Ratio disquirendi proprietates circa objecta mathematica.*

» Cum ad contemplationem naturæ eorum quæ in his scientiis proponi queunt, » non modo jucundum, sed etiam utile sit intelligere qua ratione plures proprietates » detegantur, visum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de » aliis objectis judicium fiat) indagavimus atque invenimus, sicut videre est in sequenti » porismate. »

HK est une tangente, et que K est le point de contact; que GK, IB, IK, IC sont bissectrices des angles BGC, GBH, GKH, GCH; que les triangles GBA, GCI sont semblables entre eux, etc.

La méthode suivie par l'auteur pour découvrir toutes ces propriétés n'est autre chose que l'algèbre appliquée à la géométrie. Il établit, à l'aide des théorèmes les plus élémentaires de la géométrie, un petit nombre d'équations très-simples entre les diverses lignes de la figure; puis, combinant ces équations de diverses manières, il en déduit successivement de nouveaux théorèmes.

Il termine en disant : « Et ainsi en comparant entre elles les quantités » de manière à obtenir toujours de nouvelles équations, on pourra trou- » ver d'innombrables propriétés appartenant aux objets proposés [*]. »

On voit par cet exposé que Schooten avait sur les porismes des idées qui différaient essentiellement de celles de Fermat et de Bouillaud. On doit regretter qu'il ne les ait pas développées davantage, et surtout qu'il n'ait pas dit comment, dans sa pensée, les porismes tels qu'il les concevait, pouvaient servir à expliquer les passages obscurs de Pappus et de Proclus.

Opinion de Halley.

Le savant astronome Halley, auquel on doit des travaux distingués sur la géométrie des anciens, n'est ordinairement cité, en matière de porismes, que pour avoir confessé n'y rien comprendre; mais là ne se borne pas son rôle. En effet, tandis que d'une part il rendait aux mathématiciens un éminent service, en publiant le texte grec de la préface du VII^e livre des *Collections mathématiques* de Pappus et en mettant ainsi chacun à même d'étudier dans l'original des détails qu'on pouvait croire n'avoir pas été fidèlement reproduits dans la version de Commandin; d'un autre côté, tout en déclarant ne rien comprendre à la question, il dénaturait profondément le sens de cette même version, surtout en supposant l'existence de nombreuses lacunes

[*] « Atque ita porro, comparando inter se quantitates, sic ut aliæ atque aliæ semper » obtineantur æquationes, licebit circa ea quæ proposita sunt, invenire proprietates » innumeras. »

dans la partie du texte où Pappus donne des exemples de porismes [*]. Cette supposition, que rien n'autorisait, a eu l'influence la plus fâcheuse sur la direction des recherches ultérieures.

Divination de Simson.

Robert Simson fit, en 1723, un pas vers la découverte de la vérité, en devinant le sens de cet énoncé général dans lequel Pappus résume dix porismes du premier livre de l'ouvrage d'Euclide. Puissamment encouragé par ce premier succès, il s'attacha à compléter l'explication si ardemment désirée de cette grande énigme des porismes. Ses recherches, publiées huit ans après sa mort [**], forment un corps de doctrine qui a reçu de nombreuses adhésions.

Simson dit que les porismes d'Euclide étaient des propositions dans l'énoncé desquelles on affirmait la possibilité de trouver des points fixes, des lignes fixes, des paramètres, etc., jouissant de quelque propriété déterminée pour tous les états d'une figure variable. C'est du moins à cela que revient la définition qu'il donne du porisme [***], lorsqu'on

[*] Halley termine sa version en disant : « *Hactenus porismatum descriptio nec* » *mihi intellecta nec lectori profutura. Neque aliter fieri potuit : tam ob defectum Sche-* » *matis cujus fit mentio; unde rectæ satis multæ, de quibus hic agitur, absque Notis* » *Alphabeticis, ullove alio distinctionis charactere, inter se confunduntur : quàm ob* » *omissa quædam ac transposita vel aliter vitiata in propositionis generalis expositione;* » *unde quid sibi velit Pappus haud mihi datum est conjicere. His adde dictionis mo-* » *dum nimis contractum, ac in re difficili, qualis hæc est, minimè usurpandum.* » (*Apollonii Pergæi de Sectione rationis, in præfatione*, page XXXVII.)

R. Simson, M. Poncelet et M. Chasles, ont cru, comme Halley, à l'existence de lacunes dans le texte de Pappus. Voir *Opera quædam reliqua*, page 352; *Traité des propriétés projectives*, introd., page xxxvj; *Aperçu historique*, page 12.

[**] *Roberti Simson Opera quædam reliqua*; in-4°; Glasgow, 1776; pag. 315-594.

[***] Je transcris ici intégralement les diverses définitions de Simson :

« I. Theorema est propositio in qua aliquid proponitur demonstrandum.

» II. Problema est propositio in qua aliquid proponitur construendum, vel inve- » niendum.

» III. Datum, sive propositio de Datis, est theorema in quo proponitur demonstrare » aliquid datum esse (secundum definitiones Datorum Euclidis) quod propositam » quandam relationem habet ad ea quæ ex hypothesi data sunt.

» Datum etiam in formâ problematis enuntiari potest, si nimirum ea quæ data esse » demonstranda sunt, invenienda proponuntur. Quod si fiat, demonstratio Dati, ut la réduit à ce qu'elle renferme d'essentiel. C'est d'ailleurs la forme de proposition à laquelle on est forcément conduit lorsqu'on essaye de transformer en problèmes les théorèmes présentés par Fermat comme des exemples de porismes, car ces problèmes supposent la *possibilité* de certaines relations, et on voit immédiatement que cette possibilité a besoin d'être démontrée.

Cette définition est complétée, dans l'ouvrage de Simson, par celles du *théorème*, du *problème*, des *données* et des *lieux*, que je reproduis en note. L'auteur s'est évidemment proposé de trouver des propositions dont l'énoncé présentât le double caractère du théorème et du problème; mais il est obligé d'abandonner la définition de Pappus, ce qui est une première et très-grande difficulté. En outre, il ne s'inquiète nullement d'expliquer en quoi les lieux qui figuraient dans les porismes, se distinguaient soit des *lieux plans*, soit des autres *lieux* sur lesquels les géomètres grecs avaient écrit divers traités, car on ne peut admettre qu'il n'y avait entre eux aucune différence essentielle. Mais ce que nous avons à dire deviendra beaucoup plus clair en raisonnant sur un

---

» theorema propositi, analysis erit problematis; compositio autem analysi respondens » erit constructio et demonstratio problematis.

» Quoniam Pappi definitio porismatis nimis generalis est, vice ejus sit hæc, viz.

» IV. Porisma est propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel » plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris non quidem » datis, sed quæ ad ea quæ data sunt eandem habent relationem, convenire osten» dendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam.

» Porisma etiam in forma problematis enuntiari potest, si nimirum ex quæ data » demonstranda sunt, invenienda proponantur.

» V. Locus est propositio in qua propositum est datam esse demonstrare, vel inve» nire lineam aut superficiem cujus quodlibet punctum, vel superficiem in quâ quæ» libet linea datâ lege descripta, communem habet proprietatem in propositione de» scriptam.

» Unde patet, quod Pappus affirmat, locos speciem esse porismatis; et communis affectio quæ de punctis aut lineis hisce demonstranda proponitur, est ea omnia sita » esse in una quadam linea aut superficie, quæ quidem invenienda est.

» Aliæ autem propositiones in quibus proponitur aliquid demonstrare, aut inve» nire, præter eas quæ Data aut Porismata sunt, simpliciter theoremata aut proble» mata vocantur. » (*Opera quædam reliqua*, pag. 323 et 324.)

exemple. Prenons à cet effet la proposition I, qui est d'ailleurs l'un des exemples choisis par Simson pour expliquer sa pensée.

PROPOSITION I.

Étant donné une droite PQ *et un cercle* NBC, *il existe un point* A *tel, que, menant par ce point une droite quelconque qui rencontre la droite en* M *et la circonférence en* N, *le rectangle* AM × AN *sera constant.*

On démontre aisément que le point A, où la perpendiculaire OL abaissée du centre O sur la droite PQ rencontre la circonférence, jouit en effet de la propriété énoncée, et que l'on a

$$AM \times AN = AL \times AB,$$

B étant le point de la circonférence diamétralement opposé à A.

L'énoncé ci-dessus affirme la possibilité de trouver un point tel que A, qui jouisse de cette propriété que le rectangle AM × AN soit constant, quelle que soit la direction de la droite MAN. Il y a dans le fait de cette affirmation un théorème, en tant qu'il s'agit de démontrer que le point A existe en effet. Mais comme ce point n'est pas donné par l'énoncé, non plus que la valeur du produit AM × AN, il y a là en réalité un problème à résoudre. Simson réunit ainsi dans un même énoncé le double caractère du théorème et du problème, objet principal qu'il avait en vue.

Le même exemple lui sert à expliquer comment il conçoit les lieux. La proposition ci-dessus sera un lieu si on la présente sous cette forme : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ, *si l'on mène comme on voudra la droite* AM *qui rencontre* PQ *en* M, *et que sur son prolongement on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* AM × AN *soit constant, le lieu du point* N *sera une circonférence de cercle.*

Ici l'affirmation porte sur ce point que *le lieu de* N *est une circonférence de cercle.* Simson dit qu'une pareille proposition, qu'il appelle un *lieu*, diffère du *théorème local*, lequel s'énoncerait de cette manière : *Si l'on a une circonférence* ABC *et une droite* PQ ; *que du centre* O *on abaisse* OL *perpendiculaire sur* PQ, *et que par le point* A *où cette perpendiculaire rencontre la circonférence on mène comme on voudra la droite* MAN *terminée en* M *à la droite* PQ *et en* N *à la circonférence, on aura* $AM \times AN = AL \times AB$. Simson entend par *théorème local* une proposition dans laquelle on démontre qu'une certaine propriété appartient à un lieu géométrique connu, mais il ne donne pas ce nom aux propositions dans lesquelles il s'agit de démontrer qu'il existe ou de trouver une des lignes droites, des circonférences de cercle, etc., dont tous les points jouissent d'une même propriété, définie par l'énoncé. Il leur réserve le nom de *lieux*.

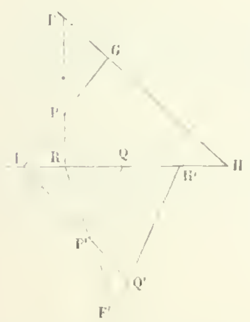
Après avoir établi cette distinction entre les *lieux* et les *propositions locales*, Simson s'occupe d'expliquer la définition des géomètres récents, rapportée par Pappus et ce que cet auteur dit lui-même des lieux, au sujet de cette définition. Il suppose que dans l'énoncé ci-dessus du théorème local, on ne donne ni le point A, ni la valeur du produit constant $AM \times AN$, et que l'on affirme d'une part que le point A existe, et d'autre part que le rectangle $AM \times AN$ est constant. Comme on est ainsi ramené à l'énoncé duquel nous sommes partis, il voit dans cette circonstance l'explication cherchée. Il considère en conséquence le porisme comme un théorème local de l'énoncé duquel on aurait retranché quelque chose; et réciproquement, en ajoutant quelque chose à l'énoncé du porisme, celui-ci doit devenir un théorème local. Il fait remarquer finalement que la chose retranchée peut être la nature même du lieu géométrique. Ainsi on peut faire cette question : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ *on mène à volonté* AM, *et sur le prolongement de cette dernière droite on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* $AM \times AN$ *soit égal à un rectangle donné. Trouver le lieu du point* N. Nous verrons plus loin que Simson a rencontré ici, sans le savoir, la véritable forme des énoncés du Traité des Porismes.

L'ouvrage de Simson renferme un grand nombre de propositions. Les unes sont des *lieux*, et notamment celles qu'il présente comme ayant dû être, dans Euclide, les divers cas de cette proposition générale de Pappus sur le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable, les deux autres sommets étant assujettis à glisser sur des droites fixes, et les trois côtés tournant respectivement autour de pôles fixes situés en ligne droite. Dans les énoncés de toutes ces propositions, Simson décrit d'abord les conditions qui règlent le mouvement du point variable, puis il affirme que le lieu géométrique de ce point est une ligne droite.

Il est difficile de ne pas voir là de véritables théorèmes semblables en tout aux propositions que, d'après Pappus, renfermait le Traité des *lieux plans* d'Apollonius.

Quant aux Porismes autres que les *lieux*, Simson en donne un certain nombre. Quelques-uns sont de nouveaux exemples qui lui servent à expliquer ses idées, quatre autres sont des porismes de Fermat, mis sous la nouvelle forme. Enfin, six sont présentés comme ayant dû faire partie de l'ouvrage d'Euclide. Ces derniers offrent un degré particulier d'intérêt, en voici les énoncés.

Proposition XXIII.



Étant donné deux points P, P′ *et une droite* IH, *si l'on mène les droites* PI, P′I *à un point quelconque de* IH, *et que* PI *détermine sur une droite fixe* FH, *à partir du point donné* F *un segment* FG, *on peut trouver une autre droite* F′H′ *et sur cette dernière un point* F′ *tels, que le segment* F′G′ *déterminé par* P′I *soit à* FG *dans un rapport donné.*

Ce porisme est tiré de la première phrase de cette partie du texte de Pappus qui renferme les exemples de porismes. La droite et le point demandés peuvent s'obtenir comme il suit. Par le point P on mène PF qui rencontre IH en R; et de ce point on tire RP′. D'autre part on mène PQ parallèle à FH, et on joint QP′. La droite cherchée est parallèle à QP′, et il ne reste plus qu'à la mener de manière que le segment F′G′ soit à FG dans la raison donnée.

PROPOSITION XXXIV.

Étant donné un triangle $\alpha\beta\zeta$ et deux points fixes γ, δ en ligne droite avec le sommet ζ, si l'on mène à un point quelconque ε de $\alpha\beta$ les droites $\gamma\varepsilon$, $\delta\varepsilon$, qui rencontrent respectivement $\alpha\zeta$ en η et $\beta\zeta$ en $\varkappa$, la droite $\eta\varkappa$ pivotera autour d'un point fixe.

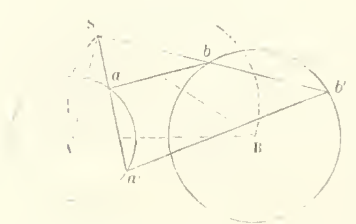
Ce porisme correspond à l'exemple que j'ai traduit ainsi « que telle droite passe par un point fixe. » Sa démonstration est une conséquence immédiate du lemme XIII, dont nous avons reproduit la figure.

PROPOSITION XLI.

Étant donné un point C *et deux droites* OX, OY, *on peut trouver sur ces dernières deux points fixes* A, B, *tels, que le produit des segments* AP, BQ, *déterminés par une transversale quelconque passant par le point* C, *soit constant.*

Ce porisme correspond au dernier des exemples qui se rapportent au premier livre du Traité d'Euclide. Les points A, B ne sont autre chose que les sommets du parallélogramme construit dans l'angle YOX sur la diagonale OC.

PROPOSITION L.

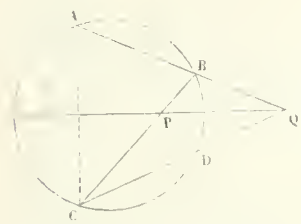


Deux cercles étant donnés, on peut trouver un point tel que, si de ce point on mène aux deux circonférences respectivement des droites formant entre elles un angle donné, et que l'on achève le triangle, tous les triangles ainsi construits seront semblables entre eux.

Ce porisme correspond au sixième exemple du troisième livre. Pour trouver le point qui jouit de la propriété énoncée, soient A, B les centres des deux cercles. Sur la droite AB construisez un triangle SAB tel, que l'angle S soit égal à l'angle donné, et que les côtés SA, SB soient entre eux comme les rayons des cercles A et B, le sommet S sera le point cherché, c'est-à-dire que si l'on mène à volonté les droites Sa, Sb faisant entre elles l'angle aSb égal à ASB, le triangle Sab sera semblable à SAB.

Pour résoudre ce problème, Simson décrit sur AB un segment capable de l'angle donné, puis il y inscrit deux cordes qui soient entre elles comme les rayons, ce qui est l'objet du lemme XXIX.

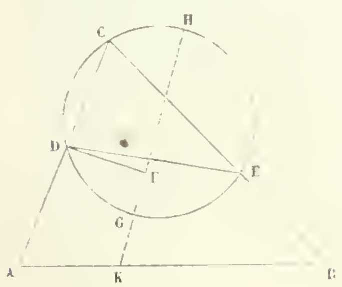
PROPOSITION LIII.



Étant donné un cercle et un point P, *on peut trouver un autre point* Q *tel, que menant par le premier une corde ou sécante quelconque* BC, *les droites* BQ, CQ *interceptent sur la circonférence des arcs égaux* AB, CD.

Ce porisme correspond au septième exemple du troisième livre. Pour trouver le point Q, on mène par le point donné P une corde quelconque CB, et par le point C perpendiculairement au diamètre sur lequel se trouve le point P, une autre corde CA. La droite AB, prolongée, coupe ce diamètre au point cherché.

PROPOSITIONS LVII, LVIII ET LXI.



Si de deux points donnés A, B, *on mène à un point quelconque* C *d'une circonférence donnée des droites qui la rencontrent de nouveau en* D, E, *la corde* DE *fera un angle constant* EDF *avec une certaine droite* DF *passant par un point fixe* F, *ou bien sera parallèle à une droite fixe, ou bien encore passera elle-même par un point fixe.*

Ce porisme correspond au huitième et dernier exemple du troisième livre. Pour construire le point F dans le cas le plus général, on mène une sécante AC par le point A, et on détermine sur AB le point K pour lequel on a

$$AK \times AB = AD \times AC.$$

Sur le diamètre passant par le point K, on détermine le point F par la condition FG : FH : : KG : KH.

Lorsque le point B est à l'infini, ou lorsque la corde CE est parallèle à AB, le point K se confond avec A.

La figure ci-dessus de la proposition LIII présente le cas où la corde est parallèle à une droite fixe, P et Q sont alors les deux points donnés et AC est la corde que l'on considère.

Ces diverses propositions sont faciles à démontrer. Elles satisfont d'une manière très-remarquable à la condition qui, pour Simson, caractérise les porismes. Mais ce résultat n'est obtenu qu'au moyen de plusieurs suppositions qui sont loin d'être justifiées. En effet, on a déjà remarqué que la forme adoptée pour les énoncés de ces propositions s'écarte de l'ancienne définition rapportée par Pappus. Pour satisfaire à la seconde, il a fallu attribuer au texte grec une signification qui paraît complétement arbitraire.

Le type d'énoncé auquel Simson rapporte les porismes, était connu des géomètres de l'antiquité, ainsi qu'on le voit dans le commentaire d'Eutoce sur les sections coniques d'Apollonius [*]. Il cite un exemple de *lieu plan,* d'après Apollonius. Or l'énoncé de cette proposition *affirme la possibilité de décrire un lieu géométrique dont tous les points jouissent d'une propriété assignée.* Il est vrai que Pappus, dans sa Notice sur les *lieux plans,* ne rappelle pas cette forme d'énoncé, mais on doit observer que, donnant des énoncés généraux qui résument les énoncés particuliers d'Apollonius, il a bien pu ne pas s'astreindre à en conserver le type primitif.

[*] Voir le § I de l'Appendice, à la fin de ce Mémoire.

Ce genre de propositions dans lesquelles Simson fait consister les porismes, a été cultivé par plusieurs géomètres anglais, lesquels se sont attachés seulement à reproduire la même forme d'énoncés [*], sans faire avancer l'interprétation de Pappus. Toutefois, je dois mentionner l'opinion de Playfair, qui pensait que les anciens avaient compris sous le nom de porisme des propositions où l'on affirme la possibilité de trouver des conditions qui rendent un problème indéterminé ou susceptible d'un nombre infini de solutions [**]. Cette définition, si elle était exacte, aurait l'avantage, sur celle de Simson, d'assigner le but qu'Euclide avait pu se proposer en écrivant son *Traité des Porismes*.

Leslie a présenté [***] la doctrine des porismes, telle que l'ont conçue Simson et Playfair, sous une forme plus nette que ne l'avaient fait ces deux géomètres, et surtout sans cette prolixité qui rend la lecture de Simson si fatigante.

Conjecture de Hoene Wronski.

Hoëne Wronski [****] n'admettait pas la divination de Simson. Dans sa pensée, la solution de la question des porismes devait nécessairement dépendre de quelque distinction à établir entre les théorèmes et les problèmes, qui permettrait de les séparer en deux classes, dont

---

[*] L'ouvrage de Matthæws Stewart, qui a pour titre : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics*, etc., c'est-à-dire *quelques théorèmes généraux d'un grand usage dans les hautes mathématiques*, et dont j'ai donné, en 1848, un précis analytique *complet* dans le tome XIII de ce Journal, se compose de propositions dont les énoncés ont la forme que Simson croit propre aux porismes.

Wallace et lord Brougham ont donné, sous le titre de *Porismes*, diverses propositions en 1798, le premier dans les *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, et le second dans les *Transactions philosophiques de la Société royale de Londres*.

[**] « A proposition affirming the possibility of finding such conditions as will render » a certain problem indeterminate, or capable of innumerable solutions. » (*Transactions de la Société royale d'Edimbourg*; 1794; tome III, page 170.)

[***] *Geometrical analysis*, liv. III, in-8°; Edimbourg, 1809 et 1821. Une traduction française de cet ouvrage a été publiée à la suite du deuxième Supplément à la *Géométrie descriptive* de Hachette; in-4°; Paris, 1818.

[****] *Introduction à la Philosophie des Mathématiques et technie de l'Algorithmie*; in-4°; Paris, 1811; page 217.

l'une comprendrait les porismes et l'autre les problèmes ordinaires. La première de ces deux classes aurait été composée des problèmes dans lesquels le but qu'on se propose d'atteindre est *nécessairement possible;* tel est le cas où l'on demande de trouver le centre d'un cercle donné. Les problèmes de la seconde classe auraient été, par contre, ceux où la possibilité du but qu'on se propose d'atteindre a besoin d'être démontrée. Par exemple, faire passer une circonférence par trois points donnés serait un problème ordinaire, parce que la possibilité de la résoudre n'est pas évidente *à priori*. On sait qu'en effet la possibilité de faire passer une circonférence par trois points donnés est l'objet d'un théorème de géométrie élémentaire.

Ce système n'est autre chose que l'application aux Porismes d'Euclide de la définition du mot *πόρισμα* donnée dans un sens purement philosophique : *Verbum Dialecticorum, Proloquium, vel Problema quod consecutionem habet necessariam atque hærentem iis quæ jàm probata sunt et comperta* [*].

Conjecture de M. Poncelet.

L'énoncé général donné par Pappus comme résumant des propositions du premier livre des Porismes et quelques-uns des lemmes qui se rapportent à cet ouvrage se présentent comme des conséquences très-simples des recherches de M. Poncelet sur les propriétés projectives des figures. Cette circonstance lui a paru être de nature à faire croire « que le Traité de Porismes d'Euclide n'avait guère d'autre objet » que ces propriétés générales et abstraites des figures, dont le carac- » tère ne pouvait que difficilement être défini par la langue de la géo- » métrie ancienne; en un mot, que les porismes étaient de véritables » propriétés projectives, déduites par Euclide des considérations de la » perspective... [**]. »

Opinion d'Eisenmann.

M. Poncelet nous apprend [***] que le professeur Eisenmann partageait cette opinion; mais ce dernier doit être considéré comme ayant

[*] *Thesaurus linguæ græcæ*, nouvelle édition, au mot Πόρισμα.

[**] *Traité des propriétés projectives des figures*, page XXXII de l'Introduction.

[***] *Ibid.*, Note de la page xxxvij.

appartenu à l'école de Simson; c'est du moins ce qui semble résulter de cette phrase, où il dit en parlant de Pappus : « N'est-ce pas lui » seul qui nous a conservé, dans une Notice abrégée, la connaissance » de ce savant Traité d'Euclide, œuvre de l'art le plus relevé, où il » enseigne la détermination des constantes arbitraires, comme nous » nous exprimons aujourd'hui [*]? »

Opinion de M. Chasles.

M. Chasles s'occupe depuis longtemps de cette grande énigme des porismes. Il admet, avec Simson, que les porismes d'Euclide étaient des propositions dans l'énoncé desquelles on affirmait la possibilité de trouver certaines choses. Mais, dans sa pensée, la question générale à laquelle Euclide a pu destiner ses porismes, a dû être celle-ci :

Un lieu étant déterminé par une construction commune à tous ses points ou par un certain système de coordonnées, trouver une autre construction ou un autre système de coordonnées qui satisfasse à tous les points de ce lieu, et qui en fasse connaître la nature et la position.

Les porismes auraient été des propositions dans lesquelles on établissait la possibilité de trouver ces nouveaux modes de construction, ces nouvelles coordonnées qui permettaient, soit de substituer à l'expression géométrique ou analytique d'un lieu une autre expression plus simple propre à en faire mieux connaître la nature et la position, soit « de ramener à une même description ou à un même système de » coordonnées les différentes parties d'une figure qui, par les hypo- » thèses de la question, étaient produites par des descriptions ou des » coordonnées différentes. » La doctrine des Porismes aurait ainsi formé une véritable Géométrie analytique qui ne différait de la nôtre que par les symboles et les procédés de l'Algèbre [**].

[*] « Nonne is est qui doctissimum illud Euclidis et summæ artis opus, quo arbi- » trarium constantium, ut nunc loquimur, determinationes instituuntur, solus nobis » compendiaria notitia servavit? » (*Pappi Alexandrini Collect. mathem. nunc primum græcè edidit Hermannus-Josephus Eisenmann, etc., libri quinti pars altera*; in-folio; Paris, 1824; Préface.)

[**] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*; in-4°; Bruxelles, 1837; pages 12, 274 et s. Voir aussi, du même auteur, le *Traité de Géométrie supérieure*; in-8°; Paris, 1852. Discours d'inauguration, pages XLIII et LXX.

Suivant M. Chasles, les porismes étaient, par rapport aux propositions locales, ce que les *données* étaient par rapport aux simples théorèmes des *Éléments*, de telle sorte que la conception de porismes aurait dérivé de celles des *données*. Cette manière de voir lui paraît confirmée par le Traité des *Connues géométriques* [*] du géomètre arabe Hassan-ben-Hassan-ben-Haïtem, qui florissait au commencement du XI^e siècle. On trouve, en effet, dans ce Traité quinze propositions relatives à des lieux géométriques, lesquelles offrent cela de remarquable, que c'est la *nature de ces lieux qui est la chose qu'on démontre être connue.* Hassan-ben-Hassan dit que ce sont là « des choses tout à fait neuves, « et dont le genre même n'était pas connu des anciens géomètres. » M. Chasles suppose que les porismes d'Euclide, qui existaient encore en Orient au XIII^e siècle suivant le géomètre Castillon [**], n'ont pas été sans influence sur cette production du géomètre arabe.

DEUXIÈME PARTIE.

COMMENTAIRE DES TEXTES DE PAPPUS ET DE PROCLUS.

En présence de la diversité des opinions qui ont été exprimées sur les porismes depuis la fin du XVI^e siècle jusqu'à nos jours, on sent la nécessité de se rattacher plus étroitement aux textes que Pappus et Proclus nous ont laissés, et de procéder autant que possible par voie d'interprétation littérale. C'est ce que j'ai fait en présentant une traduction qui les reproduit presque mot pour mot, et d'après laquelle on a pu se former une première idée de ce que je crois qu'étaient les porismes. Il ne me reste plus qu'à justifier dans ses détails l'interprétation que j'ai adoptée, notamment en ce qui concerne les passages pour lesquels je n'ai pas suivi les versions de Commandin, de Halley et de Simson.

§ I. — *Objet et utilité du Traité des Porismes. — Premiers détails qui prouvent que les porismes diffèrent des proportions ordinaires.*

J'ai peu de remarques à faire sur les généralités par lesquelles Pap-

[*] Voir le § II de l'appendice à la fin de ce Mémoire.

[**] *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1786-1787.

pus commence sa Notice sur les Porismes. Il nous apprend que ces porismes offraient les moyens de résoudre les problèmes difficiles et de découvrir les conséquences des hypothèses ou les *événements*, pour nous servir d'un mot qui a été autrefois employé dans ce sens mathématique, ainsi qu'on le voit par ce titre d'un ouvrage de Desargues : *Brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan, etc.*

Le nombre des porismes est illimité. Cependant les géomètres venus après Euclide n'en avaient ajouté aucun à ceux dont lui, le premier, avait formé un recueil. Mais Pappus les blâme pour avoir fait à quelques-uns certaines additions spécifiées par les mots δευτέρας γραφάς, que Commandin traduit par *secundas descriptiones*. L'idée qui se présente d'abord, c'est qu'il s'agit de *secondes démonstrations*, et que γραφή signifie *démonstration*. Cela exige que le terme ἀπόδειξις que l'on trouve dans la même phrase et qui ordinairement a cette signification, soit pris dans le sens d'*exposition* ou d'*exemple*, car Pappus dit que chaque porisme paraissait un certain nombre de fois dans l'ouvrage d'Euclide, et que chaque fois Euclide n'en donnait qu'une seule démonstration, μίαν γραφήν [*], extrêmement lumineuse. Toutefois il ne serait pas impossible que γραφή dût être traduit par *figure*. Alors il s'agirait simplement de figures nouvelles ajoutées mal à propos à l'unique figure donnée par Euclide dans chaque exemple de porisme.

Cette circonstance, que chaque porisme paraissait un certain nombre de fois, a embarrassé Halley. Ce géomètre, qui, selon toute vraisemblance, supposait que les porismes étaient certaines propositions que l'on énonçait et que l'on démontrait ensuite, ne concevait pas que ces propositions, énoncées et démontrées une fois, dussent être énoncées et démontrées plusieurs autres fois dans le même ouvrage. Aussi s'est-il écarté, dans sa version, du texte de Pappus et en a-t-il dénaturé le sens littéral. Nous montrerons bientôt que la nature de ces propositions comportait précisément ce que Halley croyait impossible.

---

[*] Je ne me dissimule pas que l'on pourrait m'objecter que μίαν paraît se rapporter plutôt à ἀποδείξεων qui le précède immédiatement qu'à γραφάς. Halley a traduit dans cette hypothèse, mais j'ai préféré au sens grammatical le sens logique qui veut que μίαν soit opposé à δευτέρας.

§ II. — *Éloge que fait Pappus du Traité des Porismes — Cet éloge s'applique spécialement aux méthodes mises en usage par l'auteur.*

Pappus dit que les méthodes ou les théories mises en usage par Euclide dans ce recueil étaient à la fois fines, naturelles, nécessaires et très-générales, et que l'on avait un extrême plaisir à le lire ou à l'étudier lorsqu'on était en état de *voir* et de *trouver*.

Un pareil éloge est assurément de nature à donner une bien haute idée du Traité des Porismes et à augmenter les regrets que doit inspirer sa perte. Mais il faut se garder d'en conclure qu'il renfermait une science plus relevée que celle des autres traités du *lieu résolu*. S'il en eût été ainsi, Pappus, qui est très-exact et très-judicieux, n'aurait pas manqué de le faire observer. Or non-seulement il ne dit rien qu'on puisse invoquer à l'appui d'une semblable supposition, mais encore l'ordre même dans lequel il présente ses notices peut être considéré comme une preuve du contraire. En effet, il rend compte du Traité des Porismes immédiatement après avoir parlé des *contacts*, et, après les porismes, il passe aux *lieux plans*. La science des porismes n'était donc pas supérieure à ce que nous connaissons de la géométrie des Grecs.

Il ne faudrait pas cependant tomber dans l'excès contraire et amoindrir la partie de cet éloge en le considérant comme ayant trait seulement au soin apporté dans le choix des questions. Sans doute, puisque le Traité des Porismes était un *recueil*, et que conséquemment les propositions qu'il contenait ne s'enchaînaient pas les unes aux autres comme celles d'un traité didactique proprement dit, Euclide avait pu choisir les questions les plus élégantes parmi toutes celles que ses immenses recherches avaient dû lui faire rencontrer. Tous les auteurs de recueils de problèmes usent naturellement de cette liberté de choix, de manière à intéresser le lecteur tout en l'instruisant. Mais ce n'est certes pas ce genre de mérite qui a pu valoir au Traité des Porismes une aussi éminente distinction. C'est évidemment sa haute utilité et surtout le caractère si remarquable des méthodes qui y étaient appliquées. De cette discussion résulte, pour ceux qui voudraient tenter de restituer le Traité des Porismes, la nécessité de retrouver ces méthodes elles-mêmes.

§ III. — *De la divergence d'opinions qui existait, du temps de Pappus, entre les géomètres, sur la question de savoir si les propositions du Traité des Porismes devaient être rangées parmi les théorèmes ou parmi les problèmes.*

Nous avons déjà conclu de divers indices que les porismes n'étaient pas des propositions ordinaires. Pappus confirme maintenant cette induction, en disant que les porismes n'étaient, quant au type, ni des théorèmes, ni des problèmes, mais tenaient en quelque sorte le milieu entre les deux, et qu'on pouvait leur donner à volonté la forme des théorèmes ou celle des problèmes. D'où il résultait que, parmi beaucoup de géomètres, les uns voulaient que les porismes fussent des théorèmes, tandis que les autres, n'ayant égard qu'à la forme des propositions, les appelaient des problèmes.

Ces particularités sont le point de la question des porismes sur lequel l'imagination des commentateurs s'est le plus exercée. A l'époque où parut la version de Commandin, on ne connaissait en géométrie que deux especes de propositions, les théorèmes et les problèmes, et on ne pouvait pas comprendre qu'il pût y en avoir d'autres. C'était une énigme qu'on cherchait vainement à deviner. On s'est attaché à ces indications comme si elles eussent été la définition même des porismes, et on a cru que si l'on parvenait à découvrir des propositions qui ne fussent ni des théorèmes, ni des problèmes, ou plutôt qui fussent à la fois l'un et l'autre (car tel est en réalité le résultat auquel Simson est parvenu), la *question se trouverait résolue*. Mais ce n'était point là qu'il fallait chercher le secret des porismes. Car cette discussion sur la question de savoir si les porismes étaient des théorèmes ou des problèmes résultait, ainsi que Pappus nous l'apprend, de ce qu'un grand nombre de géomètres ne connaissaient pas la véritable définition des porismes. Cette divergence d'opinions ne pouvait dès lors être considérée que comme un renseignement négatif. Si Pappus s'y arrête un instant, c'est sans doute non-seulement pour mentionner le fait, mais aussi parce que lui-même doit, en indiquant le nombre des propositions de l'ouvrage d'Euclide, faire connaître quelle en est l'espèce, ainsi qu'il le fait dans ses autres notices pour les propositions que renferment les traités auxquels ces notices sont consacrées. On voit en effet qu'il termine ce qu'il a à dire des porismes en classant comme théorèmes les propositions dont il s'agit, quoiqu'il soit certain qu'elles avaient été présentées par Euclide sous forme de problèmes.

§ IV. — *En quoi les porismes se distinguaient des théorèmes et des problèmes. — Interprétation des anciennes définitions rapportées par Pappus.*

Pappus, après avoir signalé la divergence d'opinion qui existait au sujet de l'espèce de propositions que constituaient les porismes, ajoute que la véritable différence entre les théorèmes, les problèmes et les porismes était mieux connue des anciens géomètres. Voyons donc quel était, pour eux, le sens de ces trois termes : théorème, problème, porisme.

Ils disaient :

Théorème est une vérité qu'on énonce et qu'il faut rendre évidente par une démonstration.

Problème est un but que l'on définit, et qu'il faut atteindre par une construction.

Porisme est une chose qu'on demande de découvrir. On voit, par les exemples que donne Pappus d'après Euclide, que cette chose est une *vérité*. J'adopterai cette spécification comme propre à Euclide; toutefois nous verrons plus loin que Proclus prend le terme porisme dans un sens plus étendu.

La première de ces définitions est absolument la même que celle qu'on donne aujourd'hui du théorème, tandis que la seconde diffère à certains égards de la définition actuelle du problème, savoir, que c'est *une question proposée qui exige une solution*. On voit que les modernes emploient le mot problème pour désigner non point le but même à atteindre, mais la proposition dans laquelle il s'agissait de l'atteindre. Si l'on voulait pareillement faire du porisme, qui est aussi un but à atteindre, une proposition, il faudrait dire :

Problème est une question qui se résout par une construction,

Porisme est une question qui se résout par la découverte d'une vérité. Mais il demeurera bien entendu que, par le fond, problème et porisme se rapportent au but à atteindre.

Le lecteur remarque sans doute déjà que je prends ici le mot problème dans une acception notablement moins étendue qu'on ne le fait d'ordinaire. Mais cette restriction est ici tout à fait essentielle, car d'abord elle résulte directement du texte de Pappus, et ensuite elle existe, ainsi qu'il est facile de le vérifier, dans les problèmes qu'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide. D'autres ouvrages des géomètres de l'antiquité viennent aussi démontrer ce fait.

Au surplus, l'extension que l'on a donnée dans les temps modernes à la signification du mot *problème* est si peu nécessaire en ce qui touche la géométrie proprement dite, que dans les ouvrages où l'on étudie maintenant cette science il n'y a qu'un fort petit nombre de problèmes auxquels la définition des anciens ne pourrait pas s'appliquer. Par exemple, celui de Legendre n'offre sous ce rapport que deux exceptions, savoir : 1° *Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du quarré* [*]; 2° *Étant donné les surfaces* A *et* B *d'un polygone régulier inscrit au cercle et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces* A′ *et* B′ *des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double* [**]. Dans la premiere de ces deux questions on est conduit à effectuer non point une construction, mais à formuler cette vérité abstraite : *Qu'il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré*. C'est un véritable théorème qu'Euclide [***] énonce de cette manière : *Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans le quarré la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.* Il s'agit bien là d'une vérité énoncée qu'on propose de rendre évidente par une démonstration.

La solution de la seconde question consiste dans les deux formules ou relations

$$A' = \sqrt{A \times B}, \quad B' = 2 . \frac{A + B}{A + A'},$$

qui peuvent aussi s'énoncer comme des théorèmes. Mais ces théoremes n'ont pas été donnés par Euclide.

---

[*] Livre III, problème XIX.

[**] Livre IV, problème XIII.

[***] Livre X, proposition CXVII.

L'ancienne définition de problème est donc tellement conforme à la nature des choses, que les auteurs modernes s'en écartent eux-mêmes rarement, malgré la liberté que leur laisse la définition actuelle. C'est que la raison d'être de cette dernière est moins dans les besoins nouveaux de la géométrie pure, que dans la nécessité de n'avoir qu'une seule définition pour les problèmes géométriques et algébriques.

Ainsi donc, pour les Grecs, proposer un problème en géométrie, c'était demander de construire d'après une théorie connue des points, des lignes, des figures, etc., dans des conditions assignées, ou, plus généralement, *de faire quelque opération*. Pappus et Proclus se servent de ces deux mots κατασκευή et ποίησις qui ont bien réellement cette signification.

Cela étant démontré, toutes les questions dans lesquelles le but à atteindre, au lieu d'être simplement quelque construction ou quelque opération déduite des propositions supposées connues, consistait dans la découverte d'une vérité abstraite ou impliquait cette découverte, étaient des Porismes. Tel est, selon moi, le sens de cette définition ancienne rapportée par Pappus : πόρισμα ἐστὶ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. On voit que πόρισμα est ici rapproché de πορισμός et que le premier de ces termes est au second ce que *inventum* est à *inventio*. Cette remarque caractérise bien la signification géométrique du mot πόρισμα.

Cette manière de voir est assurément plausible indépendamment de toute application aux exemples de Porismes que Pappus nous a conservés. En effet, puisque les géomètres de l'antiquité avaient le terme *théorème* pour les vérités énoncées qu'il fallait démontrer, le terme *problème* pour les questions qui se résolvaient par quelque opération, naturellement ils devaient en avoir un troisième pour les questions dans lesquelles le but à atteindre, au lieu de consister dans une opération, était ou impliquait la découverte de quelque vérité abstraite. Il ne faut pas perdre de vue que, dans la géométrie ancienne, toute vérité était démontrée par une construction, et que conséquemment le porisme suppose aussi une *construction*. Les deux problèmes de Legendre que j'ai cités plus haut sont des porismes dans l'acception générale de ce mot. Si nous examinons maintenant le porisme de

Schooten, nous reconnaîtrons que ce caractère appartient également aux diverses propositions qui ressortent successivement des recherches développées dans ce porisme. On voit qu'il faut, dans cet exemple et dans ceux de Legendre, prendre *porisme* plutôt dans le sens de *vérité à découvrir* que dans celui de *proposition, ou de question qui se résout par la découverte d'une vérité*.

Ces porismes qu'on rencontre ainsi çà et là chez divers auteurs peuvent déjà servir à fixer les idées sur le sens général du mot *porisme*. Mais la question de savoir ce qu'étaient en particulier les Porismes d'Euclide, sera traitée plus loin. lorsque la suite de ce commentaire nous conduira à examiner les exemples de porismes auxquels Pappus a consacré une partie de sa Notice.

§ V. — *L'explication qui précède fait évanouir la principale difficulté de la question des porismes. — Comment l'ancienne signification du mot* porisme *a pu se perdre*.

Nous pouvons actuellement tirer de ce qui précède la solution d'une des principales difficultés de la question des porismes. En effet, le porisme, tel que nous le définissons ici, était une question posée sous forme de problème, en ce sens qu'il s'agissait d'une chose inconnue qu'on demandait de trouver, et cependant ce n'était pas un problème, puisqu'il ne consistait pas, comme les problèmes ordinaires, uniquement dans quelque opération qui fût la conséquence d'une théorie connue. La solution ou la vérité cherchée, une fois découverte, pouvait être présentée sous la forme d'un théorème, car il s'agissait non point de démontrer une vérité préalablement énoncée, mais de découvrir cette vérité même, et de trouver ensuite la construction nécessaire pour la démontrer. Or ce sont là précisément ces particularités qui, au dire de Pappus, étaient un sujet de discussion pour les géomètres, et qui ont tant préoccupé les commentateurs. Les propositions auxquelles je donne le nom de porismes ne sont en effet, à proprement parler, ni des théorèmes ni des problèmes, et pourtant participent à la nature des uns et des autres.

Ainsi tombe cette grande difficulté qu'on rencontrait dans l'interprétation de Pappus. Il a suffi pour la faire disparaître, de rétablir la distinction qui existait dans l'antiquité entre les deux catégories de propositions aujourd'hui confondues sous le nom de problèmes.

Mais ici on peut faire une objection, ou émettre un doute. Comment expliquer que ces distinctions dont parle Pappus aient pu être oubliées ou méconnues par les géomètres de son temps? Car il semble que si le Traité des Porismes existait encore à cette époque, il devait suffire de l'ouvrir pour savoir d'une manière précise ce que c'était qu'un porisme. La réponse à cette objection est facile. En effet, les ouvrages des géomètres de l'antiquité n'étaient pas, à beaucoup près, aussi explicites que les nôtres. Par exemple, Euclide définit bien dans ses *Eléments* chacun des objets que l'on considère en géométrie, mais il ne dit nulle part ce que c'est qu'un théorème, un problème, un corollaire, un lemme, etc., et même ces mots ne paraissent pas en tête des propositions. Chaque livre est précédé de définitions, puis viennent les propositions qui consistent simplement dans une suite de paragraphes numérotés. Euclide ne dit pas non plus ce que c'est que la géométrie, enfin il ne donne pas de définition générale dans le genre de celle-ci : *La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue*. Si des *Éléments* nous passons aux *Données*, nous trouvons à faire des remarques analogues. Ainsi donc, à cette époque reculée, certaines notions qui sont aujourd'hui consignées explicitement dans les Traités de Géométrie, ne s'écrivaient pas, mais se transmettaient par la tradition. On peut donc tenir pour certain qu'on ne trouvait en tête du Traité des Porismes, ni la définition des porismes, ni l'indication de l'objet de ce traité. Il n'est donc nullement extraordinaire que la notion exacte du porisme ait pu se perdre pour beaucoup de géomètres, à une époque où l'ouvrage d'Euclide existait encore.

Ce serait sans doute un curieux sujet d'étude que l'examen, dans les documents scientifiques qui nous restent des anciens, de l'emploi qu'ils ont pu faire de certaines définitions. Leur absence dans les écrits des plus anciens géomètres s'explique sans peine. Elles n'étaient pas nécessaires lorsque la science ne se composait que d'un nombre restreint de propositions. Quand les éléments furent rassemblés en corps de doctrine, on ne dut pas songer à y ajouter d'autres définitions que celles relatives aux termes employés dans les propositions. La distinction de ces dernières en théorèmes, problèmes, etc., ne dut venir elle-même que plus tard. On se préoccupait bien plus de la rigueur des démonstrations que de définitions dont la nécessité ne se faisait pas sentir encore, et qui n'ont été introduites que par suite du besoin d'apporter plus de précision dans le langage. Pappus dit, au commencement du troisième livre de son recueil [*] : « Ceux qui se piquent de définir » avec exactitude les objets dont s'occupe la géométrie, ont coutume » d'appeler *problème* toute proposition où l'on demande de faire » quelque opération ou quelque construction, et *théorème* toute pro» position où il s'agit, certaines choses étant posées, de rendre évi» dente, à l'aide du raisonnement, une vérité qui résulte de ces choses » et qui en est entièrement la conséquence. Toutefois, parmi les an» ciens, les uns disent que toutes les propositions sont des problèmes, » d'autres que ce sont des théorèmes. » Ainsi donc, du temps même de Pappus, il s'en fallait que tous les géomètres eussent des idées bien arrêtées sur le sens de certains termes, et, par suite de la tendance que nous avons à ne voir dans la science que deux grandes divisions, savoir le *connu* et l'*inconnu*, il n'était pas rare d'en rencontrer qui ne supposaient pas qu'il pût y avoir d'autres propositions que les théorèmes et les problèmes.

§ VI. — *Seconde définition du porisme, imaginée par des géomètres récents ou contemporains de Pappus.*

Mais s'il y avait du temps de Pappus des géomètres qui, ne sachant plus ce que c'était qu'un porisme, disputaient sur la question de savoir si les propositions de l'ouvrage d'Euclide étaient des théorèmes ou des problèmes, il s'en était aussi trouvé d'autres qui, s'attachant à une circonstance que présentaient un grand nombre de ces propositions, la prenaient pour définition et disaient : *Le porisme est ce qu'il faut ajouter à l'hypothèse, pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local* [**]. Pappus repousse cette définition comme contraire à celle des

[*] *Οἱ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ ζητούμενα βουλόμενοι τεχνικώτερον διακρίνειν,... πρόβλημα μὲν ἀξιοῦσι καλεῖν ἐφ᾽ οὗ προβάλλεται τι ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι· θεώρημα δὲ ἐν ᾧ, τινῶν ὑποκειμένων, τὸ ἑπόμενον αὐτοῖς καὶ πάντως ἐπισυμβαῖνον θεωρεῖσαι, τῶν παλαιῶν τῶν μὲν προβλήματα πάντα, τῶν δὲ θεωρήματα εἶναι φασκόντων.*

[**] Textuellement : *Porisme est ce qui manque à l'hypothèse d'un théorème local.*

anciens rapportée plus haut, et à ce qui est enseigné. Il fait observer que ceux qui l'adoptaient n'étaient pas en état de découvrir par eux-mêmes tous les porismes, c'est-à-dire les choses proposées comme sujet d'investigation, et montraient ce qui était à chercher, mais ne le trouvaient pas. Ceci demande à être expliqué.

Qu'une définition nouvelle des porismes ait pu être proposée, c'est ce qui ne surprendra pas d'après ce que nous avons dit dans le précédent paragraphe. Le point important est de saisir le véritable caractère de cette définition, et de tâcher d'en tirer quelque lumière sur la nature des porismes. Car il n'est pas possible d'admettre qu'elle avait été présentée sans aucune apparence de fondement.

Comme elle s'appliquait spécialement aux *lieux*, qui étaient très-nombreux dans le Traité des Porismes, ainsi que cela sera démontré plus loin, il fallait nécessairement que la forme des énoncés relatifs aux lieux pût la justifier. Or c'est ce qui arrive dans l'exemple que voici : *Étant donné un point* A *et une droite* PQ, *on mène à volonté* AM, *et sur le prolongement de cette dernière droite on porte une longueur* AN *telle, que le rectangle* AM × AN *soit égal à un rectangle donné, trouver le lieu du point* N.

La réponse à cette question est que *le lieu du point* N *est une circonférence de cercle*. Si cette réponse était introduite dans l'énoncé, on affirmerait alors que le lieu du point N ainsi déterminé est une circonférence de cercle, c'est-à-dire que l'on énoncerait un théorème sur le cercle : ce serait un *théorème local*. Ce que l'on a proposé de découvrir, c'est-à-dire le porisme suivant l'acception des anciens géomètres, est donc, conformément à la nouvelle définition, *ce qui manque à l'hypothèse ou à l'énoncé de la question pour que celle-ci devienne un théorème local*.

On remarquera que Simson a rencontré précisément ce porisme dans ses observations à la suite de sa proposition I, mais il n'a pas adopté la forme d'énoncé qui seule pouvait rentrer dans la définition ancienne. Il a supposé que la nature du lieu devait être nécessairement indiquée dans l'énoncé. Evidemment s'il en avait été ainsi, aucun géomètre n'eût soutenu que des propositions présentées sous cette forme étaient des problèmes et non des théorèmes.

La forme des porismes relatifs aux *lieux* étant ainsi reconnue, il n'est pas inutile de faire observer qu'elle se présente naturellement, et que même elle tend à prendre place dans les *éléments*. Plusieurs auteurs proposent, de nos jours, comme sujet d'exercice, des questions à résoudre, qui sont précisément de cette forme.

Ce n'est point à dire cependant qu'il faille la regarder comme ayant été exclusivement celle des questions qui, dans les Porismes, avaient pour objet les lieux géométriques. La nature d'un lieu n'est pas la seule chose que l'on puisse proposer comme sujet de recherche. On peut la supposer connue, et demander de découvrir la relation qui existe, par exemple, entre les distances d'un point quelconque du lieu à des droites ou à des points fixes, car il est manifeste que ces distances ont entre elles une certaine relation, par le fait seul que le point considéré appartient au lieu. Cette relation qu'il s'agit de trouver présente encore les caractères du porisme. La question se résout, en effet, non point par quelque opération, mais par l'énoncé d'une vérité abstraite. La seconde définition du porisme s'applique encore directement aux questions de cette espèce

Il résulte de l'examen que nous venons de faire de cette seconde définition du porisme, que le *lieu* proposé par Fermat n'est pas un porisme. Quant au porisme de Schooten, on n'y trouve rien qui puisse être considéré comme se rapportant à cette même définition. On voit enfin que R. Simson n'a pas deviné juste et s'est complétement écarté du but qu'il poursuivait.

§ VII. — *Comment les anciens ont pu se servir d'un même terme pour désigner les corollaires et les porismes.*

L'une des conditions à remplir dans l'interprétation des porismes est d'expliquer comment les anciens ont pu être conduits à se servir d'un seul et même terme pour désigner des choses aussi différentes entre elles que les corollaires et les porismes. Cette explication est maintenant facile. En effet, par cela seul que le porisme était une vérité *qu'il fallait découvrir, et que l'énoncé de la question ne renfermait pas expli-*

citement, il offrait une analogie manifeste avec le corollaire, qui est aussi une vérité que l'on n'a pas affirmée dans l'énoncé de la proposition dans la démonstration de laquelle cette vérité surgit. La différence consiste en ce que dans le corollaire cette vérité vient s'offrir sans qu'on l'ait cherchée, tandis que dans le porisme tel que nous le concevons, on la cherche *pour elle-même*, et l'énoncé de la question ne comporte pas un autre but, quoique ce but soit une chose inconnue au moment où la question est posée.

On voit par là en quoi consiste ce qu'il y a de commun entre les corollaires et les porismes, et la raison de l'emploi du mot πόρισμα pour désigner les uns et les autres.

§ VIII. — *Interprétation des deux passages de Proclus sur les porismes.*

Les indications de Proclus sur les porismes diffèrent ou semblent différer à certains égards de celles de Pappus. Cette circonstance demande à être examinée avec attention. Jusqu'à présent je n'ai invoqué l'autorité de Proclus que pour faire connaître d'une manière précise le sens du mot *corollaire*, qui est indiqué par lui avec beaucoup de vérité, et pour prouver que les porismes étaient présentés par Euclide sous forme de problèmes. Appelant par deux fois les porismes des *problèmes*, comme beaucoup de géomètres le faisaient du temps de Pappus, il nous fournit ainsi une indication qui est d'autant plus sûre qu'elle n'exige pas qu'on suppose qu'il ait eu une connaissance complète des porismes. Evidemment s'il emploie le mot *problème* pour désigner les propositions de l'ouvrage d'Euclide, c'est à cause de la forme que ces propositions avaient en effet.

D'après Proclus, porisme est une chose *que l'on cherche*, dont la découverte requiert essentiellement de l'invention, qui n'est pas une conséquence de propositions déjà démontrées, et à laquelle on ne parvient pas par un raisonnement facile. Pour faire comprendre ce qu'il veut dire, il établit en quelque sorte un parallèle entre les théorèmes, les problèmes et les porismes. Les théorèmes (textuellement les choses qui *sont*) s'établissent par le raisonnement : tel est le cas où il s'agit de démontrer l'égalité des angles à la base d'un triangle isoscèle. Les problèmes, tels que partager un angle en deux parties égales, construire un triangle, retrancher une droite d'une autre ou l'ajouter, se réduisent essentiellement à certaines opérations. De plus, les démonstrations des théorèmes et les solutions des problèmes ont pour caractère, non-seulement de n'exiger qu'un raisonnement peu compliqué, mais encore d'être des conséquences de propositions antérieurement démontrées. Mais la solution de problèmes tels que ceux-ci : *un cercle étant donné, en trouver le centre ; trouver la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables*, n'est pas la conséquence de propositions antérieurement démontrées, ni d'un raisonnement simple ou qui se présente de lui-même à l'esprit. Elle a pour caractère d'exiger de l'invention. Proclus ajoute que de telles questions tiennent en quelque sorte le milieu entre les théorèmes et les problèmes. « Tels sont, dit-il, les porismes donnés par Euclide » dans ses livres de problèmes, mais ne nous arrêtons point à parler » de ces porismes-là. »

Ces deux exemples indiqués par Proclus appartiennent aux *Éléments* d'Euclide. Le premier, *un cercle étant donné, en trouver le centre*, est la proposition I du troisième livre, laquelle n'est précédée d'aucune autre proposition sur le cercle, de sorte que la solution n'est pas une simple conséquence de propositions antérieurement démontrées. Dans les Éléments modernes de géométrie, on ne pose cette question qu'après avoir démontré que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre du cercle. La solution donnée par Euclide comprend la découverte du principe ou théorème sur lequel cette solution est fondée, et l'application de ce principe ou la *construction* du problème.

Le second exemple, *trouver la plus grande commune mesure entre deux grandeurs commensurables*, est la proposition III du dixième livre des *Éléments*. Il donne lieu à des remarques analogues. C'est donc avec raison que Proclus dit que « ces deux propositions tiennent » en quelque sorte le milieu entre les théorèmes et les problèmes. »

Il semble résulter de ces explications que Proclus désigne sous la dénomination de *porismes* toutes les questions qui sont proposées de manière que leur solution exige une certaine contention d'esprit, l'emploi de considérations fines et surtout de l'invention. Toutes les propositions qui sont la conséquence directe d'autres propositions démontrées ou n'exigent qu'un raisonnement relativement facile, toutes les questions qui se résolvent par quelque opération ou construction qui n'est pas l'application d'une théorie déjà connue, rentreraient dans les deux grandes classes des théorèmes et des problèmes proprement dits. A ce point de vue, les problèmes un peu difficiles qu'on rencontre dans une foule d'ouvrages, par exemple ceux que Leslie a réunis dans le livre I de son *Analyse géométrique des anciens*, seraient des porismes.

Toutefois il ne faut pas se hâter de conclure de là que, dans l'opinion de Proclus, les porismes d'Euclide étaient analogues aux deux problèmes ci-dessus. C'est dans le cours de ses commentaires sur le premier livre des *Éléments* qu'il est amené à distinguer deux acceptions différentes du terme *πόρισμα*. Il tire de ces *Éléments* mêmes les exemples dont il a besoin pour fixer les idées du lecteur sur un genre particulier de propositions. Il oppose ces exemples à ceux qu'il a donnés des théorèmes et des problèmes proprement dits. Indiquant ensuite les caractères généraux des porismes, il ajoute que ce sont là les caractères des porismes d'Euclide, c'est-à-dire que les questions présentées dans le Traité des Porismes « se résolvent non par simple dé-
» duction, mais par invention et non par un raisonnement exempt de
» difficulté. Il faut, en effet, découvrir la chose demandée et la
» rendre évidente par une construction. » Proclus termine en disant : « Mais ne nous arrêtons point à parler de ces porismes-là » Il les laisse alors, en effet, pour s'étendre longuement sur les corollaires, dont il a donné auparavant cette définition que Bouillaud et après lui M. Chasles ont transportée aux porismes d'Euclide.

Tout porte donc à croire que Proclus n'a pas voulu donner des exemples de ces derniers porismes. Faisons remarquer, à l'appui de cette conclusion, que les exemples qu'il cite n'offrent certainement pas à un degré suffisant le caractère le caractère de théorèmes ou de vérités abstraites, pour que, présentés comme ils le sont sous la forme de problèmes, la question ait pu s'élever parmi les géomètres de savoir s'ils ne devaient pas être considérés plutôt comme des théorèmes, et pour que Pappus leur ait appliqué cette dernière dénomination.

Les indications de Proclus ne renferment au fond rien qui contredise celles de Pappus. Elles sont plus générales, mais moins explicites, et partant ne nous fournissent aucune lumière nouvelle. C'est donc dans les exemples de porismes que Pappus nous a conservés qu'il faut chercher la vraie notion des porismes d'Euclide.

§ IX. — *Indications de Pappus relatives aux lieux.*

L'interprétation que j'ai adoptée du passage où Pappus parle des *lieux*, est une conséquence toute naturelle de la définition des géomètres récents. Du moment où il est reconnu que le porisme est, par le fait, ce qui manque dans l'énoncé d'une proposition locale, il faut bien admettre que, dans l'ouvrage d'Euclide, le porisme, c'est-à-dire la chose qu'on demandait de trouver, n'était pas indiqué explicitement dans l'énoncé de la question. C'est ce que Pappus exprime par ces mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων.

Les lieux étaient en assez grand nombre dans le Traité des Porismes pour y former des groupes distincts, suivant la catégorie à laquelle ils appartenaient ; les uns étaient *plans*, d'autres *solides*, d'autres *linéaires* ; il y en avait aussi qui étaient *aux moyennes*.

Je m'écarte ici complétement de la version de Commandin qui a été suivie par Halley et par Simson. D'après ces commentateurs, et notamment d'après le dernier, tout lieu aurait été un porisme, et divers recueils de *lieux plans, solides, linéaires et aux moyennes* auraient été composés de porismes pris dans l'ouvrage d'Euclide.

Cette interprétation ne saurait être maintenue. Car on peut voir d'abord que tous les *lieux* n'étaient pas des porismes. En effet, nous connaissons, tant par les indications de Pappus que par le commentaire d'Eutoce sur les Coniques d'Apollonius, la forme des énoncés des *lieux plans*. Or cette forme offre un énoncé complet de théorème local et ne justifierait en aucune façon la définition des géomètres récents.

Ensuite il est bien évident que Pappus ne parle de *lieux plans, solides, linéaires et aux moyennes* que parce que le Traité des Porismes contenait réellement des lieux appartenant à ces diverses espèces, mais sous la forme spéciale indiquée par les mots κεχωρισμένων δὲ τῶν πορισμάτων, lesquels signifient que l'on avait retranché des énoncés les porismes qu'il s'agissait de découvrir.

§ X. — *Des difficultés que présentait la lecture du Traité des Porismes.*

Pappus nous apprend que les propositions du Traité des Porismes étaient difficiles à suivre, à cause de nombreux *sous-entendus;* qu'il était facile de se méprendre sur le sens qu'elles présentaient; que le lecteur n'apercevait pas toujours bien ce dont il s'agissait, et que même ce qu'il y avait de plus essentiel pouvait lui échapper.

Il ne paraît pas possible de déterminer aujourd'hui en quoi consistait précisément ce genre de difficulté, et quelle était la nature de ces sous-entendus. Peut être la rédaction d'Euclide était-elle plus concise, à raison de la destination de l'ouvrage, qui s'adressait aux géomètres *sachant voir et trouver,* et conséquemment en état d'entendre à demimot. Observons qu'il n'y a rien là qui implique contradiction avec l'éloge que Pappus fait du Traité des Porismes, si l'on admet avec nous que cet éloge s'adresse aux méthodes qui y étaient appliquées.

§ XI. — *De la proposition générale donnée par Pappus comme résumant dix propositions du premier livre du Traité des Porismes.*

Pappus, en parlant de plusieurs des ouvrages d'Apollonius, donne les énoncés de quelques propositions générales dans lesquelles ils se résumaient. Il fait observer que le Traité des Porismes n'est pas susceptible de se résumer d'une manière analogue, Euclide ne donnant pas beaucoup d'exemples de chaque porisme, et même se bornant à un seul dans quelques cas. Cependant le premier livre offrait une suite de lieux, au nombre de dix, tous de la même espèce. Pappus les comprend dans un même énoncé, et nous fait ainsi connaître d'une manière certaine l'objet d'une partie des propositions dont ce livre se composait. Voici cet énoncé réduit à ses termes essentiels : *Si les côtés d'un triangle variable sont assujettis à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite, et deux sommets à glisser sur des droites fixes, le troisième sommet décrit une ligne droite.* Pappus étend cette proposition à un polygone dont les côtés en nombre quelconque sont assujettis à passer respectivement par des points fixes situés en ligne droite, et dont tous les sommets moins un glissent sur des droites fixes. Il considère même les lieux décrits par les points d'intersection des côtés supposés indéfiniment prolongés, et suppose d'ailleurs qu'Euclide n'ignorait pas cette généralisation, mais n'avait voulu qu'en poser le principe. Les autres porismes lui paraissent renfermer de même le principe et le germe d'une foule de propositions. Remarquons que cette opinion de Pappus est exprimée sous forme dubitative, ce qui annonce qu'aucun géomètre n'est venu, après Euclide, réaliser ces développements dont la possibilité est simplement indiquée.

L'énoncé ci-dessus n'est pas présenté par Pappus sous la forme que je crois avoir été celle des propositions qui entraient dans le Traité des Porismes. Le véritable type est celui-ci : *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable dont les côtés sont assujettis à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite, et les deux autres sommets à glisser sur des droites fixes.* De cette manière, la question est mise sous forme de problème. Ce qu'il faut trouver, savoir la nature du *lieu* décrit, n'est pas une chose que l'on détermine par quelque opération, de sorte que ce n'est point là un problème proprement dit. Pappus a complété l'énoncé en ajoutant ce qu'on propose de découvrir, c'est-à-dire le porisme même ou, suivant la définition des géomètres récents, *ce qui manque à l'hypothèse pour que celle-ci devienne l'énoncé d'un théorème local;* définition qui s'applique ici naturellement, puisqu'il s'agit de propositions qui sont peut-être celles-là mêmes qui en ont donné l'idée.

L'énoncé de Pappus n'est donc pas un énoncé de porisme, mais de théorème local. Non-seulement il fixe les conditions qui déterminent le mouvement du point décrivant, mais encore il affirme que ce point décrit une droite, et ce qu'on propose, c'est de démontrer que le lieu décrit est réellement une ligne droite. On ne peut voir là qu'une vérité énoncée, qu'il faut rendre évidente par une démonstration. C'est donc un véritable théorème, et il est impossible d'imaginer que des géomètres aient pu voir là un problème.

Si Pappus ne se fait aucun scrupule de changer la forme d'énoncé adoptée par Euclide, c'est qu'il n'en pouvait résulter aucun inconvénient, puisque le Traité des Porismes existait encore, et qu'aucun géomètre ne pouvait par conséquent s'y tromper. Ayant à donner une proposition générale, il le fait de la manière la plus simple, en comprenant dans l'énoncé la demande et la réponse au lieu de les rapporter séparément. Son véritable but est de faire connaître cette proposition considérée indépendamment des porismes. C'est une occasion qu'il saisit volontiers de montrer son savoir en parlant des travaux des autres géomètres. C'est à une digression analogue, faite peut-être avec moins d'à-propos à la fin de sa Notice sur les sections coniques, que nous devons de savoir que Pappus est l'inventeur de cette autre proposition, aussi très-générale, qui est connue sous le nom de *Théorème de Guldin*.

§ XII. — *Interprétation des exemples de porismes.*

Les explications qui précèdent vont nous mettre à même d'aborder ces exemples de porismes par lesquels Pappus termine sa Notice, et qui ont été jusqu'à présent l'écueil des commentateurs. Je laisse de côté, pour y revenir tout à l'heure, le renvoi que fait Pappus à une certaine figure, ainsi que l'énoncé qui se rapporte à cette figure, et je considère immédiatement le porisme qui suit, savoir *que tel point décrit une droite donnée de position*. C'était là évidemment la solution commune des divers cas de cette question énoncée dans le précédent paragraphe : *Trouver le lieu décrit par le sommet d'un triangle variable, les deux autres sommets étant assujettis à glisser sur des droites fixes et les trois côtés à passer respectivement par trois points fixes situés en ligne droite*. Nous avons vu qu'au commencement du premier livre du Traité des Porismes Euclide avait résolu dix questions résumées dans cet énoncé. Toutes ces questions et vraisemblablement d'autres encore, mais dans lesquelles le point décrivant était soumis à d'autres conditions, comportaient une seule et même réponse, savoir *que le lieu décrit est une ligne droite*.

Cette réponse ou solution qui se représentait ainsi un grand nombre de fois, était le porisme même, c'est-à-dire *ce qu'il fallait trouver*, et, puisqu'il s'agit d'un lieu, *ce qu'il fallait ajouter à l'énoncé de la question pour faire de celle-ci un théorème local*. Car Pappus n'a pas voulu reproduire les divers énoncés des questions résolues par Euclide, mais seulement donner les porismes eux-mêmes, indépendamment de ces énoncés. C'est là ce qu'il veut dire quand il fait observer qu'il ne faut pas s'attacher aux *hypothèses* lesquelles sont très-particulières et toutes différentes les unes des autres, mais aux choses qu'il s'agit de découvrir ou qui s'offrent dans les recherches, chacune de ces choses reparaissant dans plusieurs hypothèses et se retrouvant la même nonobstant la diversité de celles-ci. Cette intention est d'ailleurs rendue évidente lorsque Pappus dit : « Voici en conséquence pour le premier » livre les genres des choses cherchées dans les propositions. »

Ceci nous donne véritablement la clef de ces énigmes dont le sens est resté si longtemps caché. Nous apercevons que le texte des exemples n'offre pas ces lacunes que l'on y supposait, et que si tous commencent par la conjonction ὅτι, comme des énoncés de théorèmes dont on aurait retranché l'*hypothèse*, c'est que telle a été en effet l'intention de Pappus.

Cette conclusion, qu'on le remarque bien, découle très-directement du texte grec pris dans son sens littéral, genre de preuve qui est d'une extrême importance dans une question aussi controversée que celle des porismes. Nous nous trouvons donc en présence d'un texte à peu près *complet*. Je ne veux pas dire toutefois qu'il doive en même temps être considéré comme exempt de toute altération. Il est au contraire facile de voir que ce texte a subi, de même que tout ce qui nous reste des *Collections mathématiques*, les atteintes de l'ignorance et de la négligence des copistes. Mais j'aime à croire que ces atteintes n'ont rien d'absolument irréparable, et que les savants auxquels la géométrie ancienne est familière parviendront sans peine à rétablir dans toute leur pureté ceux des porismes dont la signification, telle que je la donne, paraîtrait incertaine ou contestable.

§ XIII. — *De la figure à laquelle Pappus renvoie au commencement des exemples de porismes.*

Le renvoi exprimé par les mots ἐν ἀρχῇ τοῦ ζ que j'ai traduits « au commencement du nº 7 », m'a paru se rapporter à l'ouvrage même d'Euclide. Les traités géométriques des anciens étaient divisés en paragraphes portant une série de numéros, à peu près comme on a coutume de le faire à présent dans les ouvrages de mathématiques, et ce serait conséquemment au § 7 du premier livre du Traité des Porismes que Pappus renvoie le lecteur. On ne peut d'ailleurs douter qu'il ne s'agisse du système de deux droites assujetties à pivoter autour de deux points fixes et à se couper sur une troisième droite supposée fixe. Les segments formés par ces deux droites mobiles, sur deux autres droites fixes, à partir de points respectivement donnés sur ces dernières, conservent entre eux un rapport constant. Mais cette proposition, savoir que les deux segments ainsi déterminés sont entre eux dans un rapport constant, n'est vraie que sous certaines conditions, faciles à trouver [*]. La possibilité de trouver ces conditions, ou plutôt de compléter le système en partie donné, de telle sorte que cette proposition se vérifie, est ce qui, dans la divination de Simson, constitue l'essence du porisme. A notre point de vue, le porisme ne peut être ici que le fait de la constance du rapport des deux segments.

Malgré ce que cette hypothèse présente de plausible, je dois en faire connaître une autre à laquelle j'aurais peut-être donné la préférence, si elle eût été d'une nature moins conjecturale. Elle consiste à interpréter ces mots ἐν ἀρχῇ τοῦ ζ' comme un renvoi à la partie du septième livre des *Collections mathématiques* qui est consacrée aux porismes d'Euclide, c'est-à-dire aux lemmes de Pappus. La figure qui accompagne le lemme I est bien dans les conditions indiquées. η et ζ seraient les points ou pôles fixes, $\alpha\beta$ la droite sur laquelle les droites mobiles sont assujetties à se couper, $\gamma\theta$, $\delta\kappa$ les deux segments dont le rapport doit être constant. La constance de ce rapport est d'ailleurs une conséquence du parallélisme des droites $\delta\gamma$, $\kappa\theta$, démontré dans le lemme dont il s'agit. De cette manière, la figure à laquelle Pappus renvoie serait retrouvée, et on sent bien que ce serait là un résultat sinon important pour la solution de la question des porismes, du moins digne de fixer l'attention. Cette interprétation se recommande encore par cette circonstance, que le lemme I est mentionné expressément comme se rapportant au premier porisme.

Quoi qu'il en soit de ces deux interprétations, il est évident que

---

[*] *Voir* ce que nous avons dit au sujet de la proposition XXIII de Simson, page 261.

l'une et l'autre permettent de rétablir comme il suit l'avant-dernière phrase du troisième paragraphe de la Notice sur les porismes : Μετὰ δὲ τὸ δεδομένον πρὸς ἀρχὴν τοῦ πρώτου βιβλίου ἔνια τέθεικεν, etc., c'est-à-dire : « Cependant il en a placé, après le porisme donné au » commencement du premier livre, quelques-uns, etc. » Cette restitution comble d'une manière heureuse l'une des deux lacunes que j'ai indiquées dans le texte.

Il ne serait pas impossible que le système particulier de points et de lignes auquel Pappus renvoie se rapportât non point à un seul porisme, mais à tous ceux du premier livre. Ces porismes seraient alors les *événements* d'un type unique sur lequel on aurait fait différentes hypothèses. Cette conjecture demanderait, pour être justifiée, un examen spécial que je ne puis faire ici, mais que rendent facile les chapitres XXI et XXII du *Traité de Géométrie supérieure*. On serait ainsi conduit à concevoir le Traité des Porismes comme composé de paragraphes analogues au *porisme* de Schooten, lesquels auraient conséquemment roulé sur divers types de figures ou systèmes de points et de lignes, dont chacun servait à mettre en évidence un certain nombre de porismes. On s'explique facilement que les porismes trouvés dans un système pouvaient s'offrir de nouveau dans les autres systèmes, et, par suite, reparaître plusieurs fois, conformément à ce que Pappus nous apprend.

Je crois inutile d'insister davantage sur ces inductions nécessairement très-hasardées. Remarquons, au surplus, qu'il ne faut pas s'étonner de ces incertitudes qu'on rencontre dès qu'il s'agit de déterminer avec quelque précision les énoncés de ces questions qui étaient résolues dans l'ouvrage d'Euclide, puisque Pappus ne s'est attaché à faire connaître que les porismes.

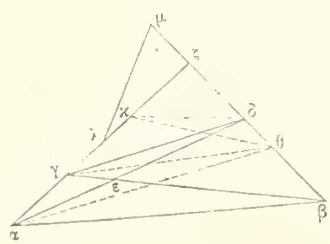
§ XIV. — *Remarques sur quelques porismes*

Les deux porismes qui font suite à ceux que nous venons de prendre pour exemples, savoir *que le rapport de telle droite à telle autre est constant* et *que le rapport de telle droite à une certaine abscisse est constant*, sont certainement de ceux qui se présentent le plus souvent. Ils devaient naturellement figurer parmi les premiers dans le Traité des Porismes.

Le suivant, *que telle droite est donnée de direction*, ne résulte pas de l'interprétation littérale du texte, tel qu'il nous est parvenu, laquelle eût été *que telle droite est donnée de position*. L'adoption de cette interprétation aurait eu pour conséquence de conduire à admettre parmi les porismes une proposition de l'espèce de celles qui font l'objet du livre des *Données* d'Euclide. Je n'ai pas cru que cela fût possible, et il m'a paru indispensable de faire ici une de ces rectifications qui, vu l'état des manuscrits de Pappus, ne peuvent être complétement évitées. Tout porte à croire que les énoncés ou les *hypothèses* des questions traitées par Euclide roulaient exclusivement sur des figures variables de forme suivant certaines conditions, ce qui ne s'accorde guère avec cette conclusion *qu'une certaine droite est donnée de position*.

Non-seulement la rectification que j'ai faite évite cet inconvénient, mais encore le porisme dont il s'agit, ainsi rétabli, se trouve précéder très-naturellement et presque annoncer celui-ci : *que telle droite passe par un point fixe*.

Les autres porismes du premier livre sont pour la plupart des *relations segmentaires*, qu'on retrouvera sans peine dans le *Traité de Géometrie supérieure*. Je dois cependant faire observer qu'un certain nombre sont présentés sous forme de *relations d'aires*. Plusieurs théorèmes sur les sections coniques, dans le grand Traité d'Apollonius, consistent dans de telles relations, qui sont aujourd'hui peu connues. On peut rapporter à ce type le dernier porisme du premier livre, savoir *que telle droite détermine sur des droites données des segments dont le produit est constant*. Il a été rétabli, comme nous l'avons vu, par Simson, à son point de vue particulier. Je vais, pour fixer les idées, indiquer une seconde manière de le rétablir, c'est-à-dire *énoncer une question à laquelle il servira de réponse*. Voici cette question :



Etant donné deux droites $\zeta\alpha$, $\zeta\beta$, *et sur ces droites les points* α, β, *trouver la relation qui doit exister entre les segments* $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, *pour que les aires des deux triangles* $\alpha\beta\varepsilon$, $\delta\gamma\varepsilon$, *formés par les côtés et les diagonales du quadrilatère* $\alpha\beta\delta\gamma$, *aient entre elles une différence égale à l'aire du triangle donné* $\lambda\mu\zeta$?

On trouve, en effet, facilement que *le rectangle ou le produit* $\alpha\gamma \times \beta\delta$ *doit être constant*, et c'est là le Porisme cherché.

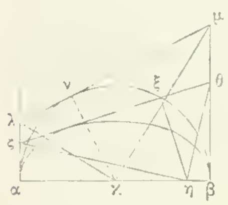
Il ne sera peut-être pas sans intérêt de faire observer que les lemmes XX et XXI semblent avoir trait spécialement aux propositions dans lesquelles il s'agissait, comme dans celle-ci, de relations d'aires. Pour montrer de quelle manière ces lemmes sont utiles dans la circonstance actuelle, prenons $\zeta\theta = \delta\beta$ et joignons $\alpha\theta$, $\gamma\theta$. Puisque, par hypothèse, la différence des aires des deux triangles $\alpha\beta\varepsilon$, $\delta\varepsilon\gamma$, doit être constante, il en sera de même de la différence des aires des deux triangles $\alpha\beta\delta$, $\gamma\beta\delta$, qui ont en commun la partie $\varepsilon\beta\delta$. Or les triangles $\alpha\theta\zeta$, $\gamma\theta\zeta$ sont respectivement équivalents aux triangles $\alpha\beta\delta$, $\gamma\beta\delta$, comme ayant même sommet et leurs bases égales et situées sur une même ligne droite. La question se réduit donc à trouver la relation nécessaire pour que l'aire du triangle $\alpha\gamma\theta$ soit égale à l'aire $\lambda\mu\zeta$. Si maintenant nous prenons $\zeta\varkappa = \gamma\alpha$, et si nous joignons $\varkappa\theta$, le triangle $\zeta\varkappa\theta$ sera équivalent à $\alpha\gamma\theta$. Or, en vertu du lemme XXI, les aires des triangles $\zeta\varkappa\theta$, $\lambda\mu\zeta$ sont entre elles comme les rectangles ou produits $\zeta\varkappa \times \zeta\theta$, $\zeta\lambda \times \zeta\mu$, et comme elles doivent être égales entre elles, il faut que l'on ait

$$\zeta\varkappa \times \zeta\theta = \zeta\lambda \times \zeta\mu \quad \text{ou} \quad \alpha\gamma \times \beta\delta = \zeta\lambda \times \zeta\mu,$$

puisque l'on a, par la construction,

$$\zeta\varkappa = \gamma\alpha \quad \text{et} \quad \zeta\theta = \delta\beta.$$

On peut déterminer une foule d'autres hypothèses pour le même porisme. Je me bornerai à citer celle-ci :



Étant donné un demi-cercle décrit sur le diamètre $\alpha\beta$, *concevons que l'on ait mené les deux tangentes* $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, *et que d'un point quelconque* ν *de la demi-circonférence on mène une troisième tangente qui rencontre les deux premières respectivement en* λ *et* μ, *trouver la relation entre les segments* $\alpha\lambda$, $\beta\mu$.

Pour résoudre cette question, menez du centre $\varkappa$ au point ν de contact la droite $\varkappa\nu$. Les deux triangles $\lambda\varkappa\alpha$, $\lambda\varkappa\nu$ sont égaux entre eux, comme étant rectangles en α et en ν, ayant en commun l'hypoténuse $\lambda\varkappa$

et ayant un côté de l'angle droit égal, savoir $\nu\varkappa = \alpha\varkappa$. Donc l'angle $\lambda\varkappa\mu$ est égal à la demi-somme des deux angles droits, donc le triangle $\lambda\varkappa\mu$ est rectangle en $\varkappa$, et on a

$$\lambda\nu \times \mu\nu = \overline{\varkappa\nu}^2.$$

Or

$$\lambda\nu = \lambda\alpha, \quad \mu\nu = \mu\beta;$$

donc le produit $\alpha\lambda \times \beta\mu$ est égal au quarré du rayon.

Cette démonstration met en évidence un autre Porisme, savoir *que la tangente variable $\lambda\mu$ est vue du centre $\varkappa$ sous un angle constant*. Ce porisme se présente ici à la manière des corollaires, parce que nous avons borné notre énoncé à la relation entre les segments $\alpha\lambda$, $\beta\mu$. Si l'on eût demandé de faire connaître les conséquences, ou, pour parler comme Desargues, les *événements* de la rencontre de la tangente variable $\lambda\mu$ avec les deux tangentes fixes $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, ce porisme se serait présenté de la même manière que le premier; mais rien dans la Notice de Pappus ne donne lieu de penser que ces porismes ainsi rencontrés comme des corollaires, c'est-à-dire que l'on ait eu l'intention de les chercher, n'étaient point considérés comme des porismes proprement dits. Bien loin de là, Pappus se sert, pour désigner les porismes, des deux termes *ζητούμενα* et *συμβεβηκότα*, qui correspondent parfaitement à ces deux origines, d'où il résulte que lui-même les avait remarquées. Le premier de ces termes s'applique évidemment aux choses que l'on recherche pour elles-mêmes, et le second à celles qui s'offrent, chemin faisant, dans le cours des recherches et qui conséquemment sont en quelque sorte aux porismes ce que les corollaires sont aux propositions de la géométrie. Les deux porismes du troisième livre, qui rappellent la forme d'énoncé adoptée par Simson, et dont l'un s'est rencontré dans la démonstration qui précède, paraissent avoir appartenu spécialement à cette catégorie de porismes accidentels Mais l'ensemble des porismes est désigné plus particulièrement par le terme *ζητούμενα*, dont Pappus se sert exclusivement en annonçant le contenu de chacun des livres de l'ouvrage d'Euclide.

Le Porisme ci-dessus, savoir *que le produit $\alpha\lambda \times \beta\mu$ est constant*, peut être pris pour hypothèse, et si l'on admet que le produit $\alpha\zeta \times \beta\theta$ est égal, non plus au carré du rayon, mais à une quantité moindre, il existera encore un point η tel, que la droite $\zeta\theta$ sera vue du point η

sous un angle constant. Nous savons en effet que l'enveloppe de $\zeta\theta$ est une ellipse ayant $\alpha\beta$ pour axe focal, et que chacun des foyers jouit de la propriété énoncée. ξ étant l'un des points de rencontre de $\zeta\theta$ avec la demi-circonférence $\alpha\nu\beta$, le foyer η se trouve sur la droite $\xi\eta$ menée par ce point ξ perpendiculairement à $\zeta\theta$, et l'angle $\zeta\eta\theta$ est droit.

Il semble résulter du lemme XXXI que cette propriété avait été considérée par Euclide non-seulement dans le cas où les segments $\alpha\zeta$, $\beta\theta$ sont situés d'un même côté de $\alpha\beta$, mais encore dans celui de segments situés de côtés différents par rapport à cette droite.

C'est peut-être là qu'Apollonius a puisé la notion des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole; on s'expliquerait ainsi comment il a pu ne pas connaître le foyer de la parabole.

Le dernier porisme, *que telle droite est parallèle à une autre droite ou fait avec cette dernière un angle constant,* qui a été rétabli par Simson dans de curieuses propositions sur le cercle, se retrouve ici très-naturellement, d'abord en ce que la droite $\eta\xi$, menée du foyer ζ au point ξ où la droite $\zeta\theta$ rencontre la circonférence décrite sur $\alpha\beta$, est parallèle à la droite menée de l'autre foyer au second point de rencontre, et ensuite en ce que l'angle $\eta\xi\zeta$ est constant. Mais ce ne sont là que des cas particuliers d'une proposition plus générale. Il y a une infinité de circonférences qui jouissent de propriétés analogues à celles de la circonférence $\alpha\nu\beta$, et qui sont telles, que les droites menées des deux foyers aux points d'intersection de l'une quelconque de ces circonférences avec la droite variable $\zeta\theta$ font entre elles un angle constant. Et il arrive en même temps que le triangle qui a pour sommets le foyer et les points de rencontre de $\zeta\theta$ avec deux de ces circonférences reste toujours semblable à lui-même, ce qui est l'antépénultième porisme. Je me borne à ce simple énoncé, la démonstration étant très-facile à trouver.

Je terminerai ces remarques par faire observer que le même porisme reparaissait plusieurs fois dans l'ouvrage d'Euclide, et que cela résulte clairement de ce que dit Pappus. Il expose d'abord les porismes du premier livre, puis il ajoute que dans le second ce sont les mêmes porismes qui reparaissent dans d'autres hypothèses, sauf un certain nombre, qu'il fait connaître. Enfin, dans le troisième livre, ce sont des porismes offrant beaucoup d'analogie avec ceux des deux livres précédents, avec cette particularité que les hypothèses sont relatives au demi-cercle, au cercle entier et aux segments de cercle. S'il ne dit pas qu'il y avait absolument identité, c'est sans doute parce que certains lieux géométriques n'étaient pas de la même nature que ceux considérés dans les deux premiers livres.

Ces détails confirment ce que j'ai dit dans le § I de ce Commentaire sur les additions que certains géomètres avaient faites à quelques porismes. Il résulte en effet de la nature même des porismes, qu'Euclide en avait donné plutôt des *exemples* que des *démonstrations*. Ensuite nous avons vu que plusieurs exemples de certains porismes étaient donnés dans un même livre, et notamment celui-ci : *que tel point décrit une droite donnée de position*. Il suit de là que le terme γραφή, dont la signification reste à déterminer, ne peut que se rapporter à quelques nouvelles manières de déduire de certaines hypothèses d'Euclide les porismes que lui-même en avait fait ressortir, à moins qu'il ne s'agisse simplement de nouvelles figures, comme je l'ai aussi indiqué.

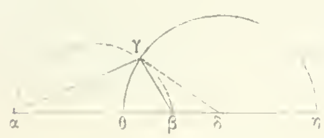
§ XV. — *De l'usage qu'on peut faire des lieux plans d'Apollonius pour rétablir une partie des propositions du Traité des Porismes.*

Parmi les Notices que renferme la préface du septième livre des *Collections mathématiques*, il en est une [*] qui appelle particulièrement l'attention, et dont l'importance dans la question des porismes a d'ailleurs été signalée par M. Chasles : c'est celle que Pappus a consacrée aux deux livres d'Apollonius sur les *lieux plans*. Pappus nous fait connaître, dans cette Notice, quelles étaient les propositions dont cet ouvrage se composait; elles roulaient sur la ligne droite et le cercle, considérés dans leurs divers modes de génération. Or nous avons vu que la très-grande majorité des questions résolues dans le Traité des Porismes se rapportaient à des *lieux*, et dans le nombre il y en avait probablement beaucoup dont la solution consistait à montrer que le lieu décrit par un point était une ligne droite ou une circonférence de cercle. D'après cela, on est conduit à croire qu'en reprenant les énoncés des *lieux plans*, et en les présentant sous la forme de problèmes

[*] *Voir* le § I de l'Appendice à la fin de ce Mémoire.

dans lesquels ce qu'il faut déterminer est la nature même du *lieu* décrit, on rétablirait plusieurs des questions qui ont figuré dans le Traité des Porismes. Mais lesquelles admettre, lesquelles exclure? C'est ce que nous ne savons pas et ce que nous ne saurons peut-être jamais.

Le second énoncé du deuxième livre des *lieux plans*, savoir : *Le lieu du point dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant, est une droite ou une circonférence de cercle*, correspondrait, en particulier, à cette question, qui est le porisme d'Alexandre Anderson : *Deux points fixes étant donnés, quel est le lieu du point dont les distances à ces deux points sont entre elles dans le rapport de deux longueurs données* ε, ζ? Le lemme XXIX se présente assez naturellement comme moyen de solution. Supposons en effet que α et β soient les deux points donnés, et que l'on ait décrit à volonté un arc de cercle passant par ces deux points. Ce lemme fournit le moyen de construire le point γ tel, que l'on ait



$$\alpha\gamma : \beta\gamma :: \varepsilon : \zeta.$$

Mais il nous apprend en même temps que le point δ où la tangente menée par le point γ rencontre la droite $\alpha\beta$, est indépendant du rayon de l'arc, et qu'il en est de même de la distance $\gamma\delta$. Donc tout point du lieu est à une distance constante $\gamma\delta$ d'un point fixe δ, donc ce lieu est une circonférence de cercle.

Le dernier énoncé des lieux plans a des rapports manifestes avec le lemme XXXIII.

On pourrait multiplier davantage les rapprochements entre les *lieux plans* et les lemmes de Pappus; mais afin de ne pas me jeter dans des développements que le lecteur attentif pourra pousser aussi loin qu'il le voudra, je me bornerai à une dernière remarque.

Le premier énoncé des *lieux plans* est ainsi conçu : *Deux droites sont menées, soit d'un même point fixe, soit de deux points fixes, dans la même direction ou de manière à former un angle constant. Les longueurs de ces droites sont entre elles dans un rapport constant ou bien font un produit constant. Si l'extrémité de l'une d'elles décrit un lieu plan donné de position, l'extrémité de la seconde décrira aussi un lieu plan donné de position, tantôt de même espèce que le* *premier, tantôt d'espèce différente, et la position du nouveau lieu dépendra de la direction dans laquelle le rayon de ce dernier aura été mesuré à partir du point fixe qui lui sert d'origine.* On reconnaît là une foule de *lieux* obtenus *par voie de transformation*, et on ne peut douter que ces transformations n'aient figuré dans le Traité des Porismes. J'avais même, dans l'origine, borné les Porismes à ces transformations; mais j'ai dû abandonner ce point de vue trop restreint, à mesure que je parvenais à mieux démêler le sens du texte de Pappus.

Ne perdons pas de vue que les *lieux plans* n'étaient pas les seuls dont Euclide se fût occupé dans son Traité des Porismes, et que si nous possédions les Traités des Grecs sur les *lieux solides*, les *linéaires* et *ceux aux moyennes*, ou si nous avions seulement sur leur contenu l'équivalent de la Notice de Pappus sur les *lieux plans*, nous pourrions vraisemblablement en tirer de nouvelles lumières sur la composition du Traité des Porismes.

§ XVI. — *D'une conjecture à laquelle donnent lieu les lemmes de Pappus.*

J'ai fait connaître dans la première partie de cet écrit les raisons pour lesquelles il est peu à espérer qu'on puisse remonter des lemmes de Pappus aux propositions mêmes du Traité des Porismes. Nous avons vu toutefois, dans le cours de ces recherches, quelques-uns de ces lemmes s'offrir, avec un certain à propos, comme d'utiles auxiliaires, et cette circonstance nous conduit à consigner ici, sous toute réserve, une conjecture qui s'applique à un assez grand nombre de lemmes.

Puisque la plus grande partie des propositions du Traité des Porismes étaient relatives à des lieux géométriques, on peut penser que ces lemmes se rapportaient aussi en grande partie à des *lieux*. Or il se trouve que la plupart ont pour réciproques des *propositions locales*. Ainsi le lemme I, lorsqu'on suppose que $\theta\varkappa$ se meut en restant parallèle à $\gamma\delta$, correspond à ce porisme *que le point ε décrit une ligne droite*. Le lemme II, en supposant fixes les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ et les trois points ε, ζ, $\varkappa$, et la droite $\zeta\theta$ mobile, correspond à ce même porisme *que le point δ décrit une ligne droite*, et ainsi de presque tous les autres; cela est même vrai de ceux où il s'agit de systèmes de quatre points en ligne droite. Cette transformation peut s'effectuer :

Pour le lemme XXII, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\delta$. Si l'on inscrit une corde $\delta\varepsilon = \delta\beta$, on aura $\alpha\varepsilon = \alpha\gamma$.

Pour les lemmes XXIII et XXV, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\beta$. Si l'on inscrit la corde $\beta\varepsilon = \beta\delta$, le point γ sera le pied de la perpendiculaire abaissée de ε sur le diamètre.

Pour le lemme XXIV, en décrivant une demi-circonférence sur le segment $\alpha\beta$. Les arcs décrits des points α et β comme centres avec les rayons $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, se coupent sur cette demi circonférence.

Pour les lemmes XXVI et XXVII, en décrivant une circonférence sur le segment $\beta\gamma$ comme diamètre, puis élevant sur la droite $\alpha\beta$ la perpendiculaire $\alpha\lambda$. Si l'on mène du point λ la droite $\lambda\beta$, qui rencontre en ν la circonférence décrite sur $\beta\gamma$, on a respectivement et les signes semblables se correspondant,

$$\lambda\beta : \beta\nu :: (\lambda\beta \pm \beta\delta)^2 : (\beta\delta \pm \beta\nu)^2.$$

Pour le lemme XXXIV, en décrivant une demi-circonférence sur $\alpha\gamma$. Si l'on décrit une autre demi-circonférence sur $\varepsilon\beta$, elle coupe la première en un point qui se projette en δ sur le diamètre.

On peut donc voir dans ces lemmes autant de propriétés du cercle, qui ont pu servir à reconnaître cette courbe. Mais, je le répète, de telles conjectures, quelques séduisantes qu'elles puissent paraître, doivent être considérées comme très-hasardées.

§ XVII. — *Résumé et Conclusions.*

Les résultats auxquels je suis parvenu dans ce commentaire peuvent se résumer comme il suit :

1°. Les Porismes d'Euclide nous ont été conservés dans la Notice de Pappus. La partie de cette Notice qui leur est consacrée doit être considérée comme à peu près exempte de lacunes, sinon de défectuosités du même genre que celles qu'on peut signaler dans les autres parties encore manuscrites du texte des *Collections mathématiques*. Il est vraisemblable que nous avons ainsi tous ou presque tous les porismes qu'Euclide avait considérés.

2°. Ces porismes n'étaient pas des propositions, mais servaient de réponse à une foule de questions dont les énoncés n'ont pas été reproduits par Pappus, lequel n'y a attaché aucune importance.

3°. Les questions traitées dans l'ouvrage d'Euclide étaient présentées sous forme de problèmes, et à cause de cela beaucoup de géomètres, entre autres Proclus, les classaient parmi les problèmes. D'autres, se fondant sur ce que les solutions étaient des énoncés de théorèmes ou des vérités abstraites, considéraient ces propositions comme de véritables théorèmes.

4°. La plupart de ces questions étaient relatives à des *lieux* géométriques. Euclide s'était proposé vraisemblablement d'enseigner les moyens de reconnaître la nature d'un lieu, lorsque cette nature n'était pas mise en évidence par son mode de construction. Cette connaissance mettait les géomètres à même de résoudre par des intersections de *lieux* une foule de problèmes qui autrement eussent été inabordables.

5°. C'est à ce grand nombre de questions relatives aux *lieux*, et aussi à l'absence de certaines définitions dans les Traités des géomètres grecs et nommément d'Euclide, qu'il faut attribuer la définition des porismes rapportée par Pappus d'après certains géomètres récents. Ces questions formaient, dans le Traité des Porismes, des groupes distincts, avec des intitulés spéciaux. Elles comprenaient non-seulement des *lieux plans*, mais encore des *lieux solides*, des *lieux linéaires* et des *lieux aux moyennes*.

6°. Au fond, les porismes n'étaient autre chose que les relations qui s'offraient le plus souvent dans les recherches géométriques. La pensée qui a inspiré le Traité des Porismes a dû être de fournir des exemples de ces relations, avec les procédés les plus généraux à employer pour en constater l'existence selon les cas.

7°. Proclus a montré par deux exemples qu'il existe dans les *Éléments* d'Euclide des questions qui, présentées sous forme de problèmes, diffèrent des problèmes proprement dits, lesquels consistaient, à proprement parler, dans toute opération déduite, comme une conséquence, de propositions déjà démontrées. Après avoir signalé le caractère d'invention qui distingue ces questions, il ajoute que les Porismes d'Euclide offraient ce caractère ; mais il ne donne aucune notion particulière sur ces derniers, si ce n'est en disant que ce sont des problèmes.

8°. Les recherches qui restent à faire sur la question des porismes consisteraient principalement à préciser, s'il y a lieu, mieux que je n'ai pu le faire, la signification de chaque porisme, et à reconstituer d'une manière plausible les méthodes générales qu'Euclide avait mises en usage dans son Traité.

APPENDICE.

§ I. — *Précis des lieux plans d'Apollonius, d'après Pappus.*

Les géomètres de l'antiquité ont appelé *lieux plans* les lieux à la ligne droite et au cercle. Les deux livres de l'ouvrage d'Apollonius sur les *lieux plans* se composaient en effet de propositions ayant pour objet de démontrer que les *lieux géométriques*, résultant de diverses constructions, sont des droites ou des circonférences de cercle. On avait remarqué de bonne heure que ces constructions peuvent être variées à l'infini, et qu'il eût été chimérique de vouloir les rassembler toutes dans un recueil. C'est pourquoi Apollonius n'avait donné que les *éléments* de la matière. Comme des éléments ne s'inventent pas, il est permis d'admettre, avec M. Chasles, que l'auteur a pu se servir des porismes d'Euclide, dans une certaine mesure, et en ramenant les propositions ainsi empruntées à la forme que comportait son point de vue particulier.

Voici les énoncés *des lieux plans* que Pappus nous a conservés dans la préface du septième livre de son Recueil.

Premier livre.

1. Deux droites sont menées soit d'un même point fixe, soit de deux points fixes, dans la même direction ou de manière à former un angle constant; les longueurs de ces droites sont entre elles dans un rapport constant ou bien font un produit constant. Si l'extrémité de l'une d'elles décrit un lieu plan donné de position, l'extrémité de la seconde décrira aussi un lieu plan donné de position, tantôt de même espèce que le premier, tantôt d'espèce différente, et la position du nouveau

lieu dépendra de la direction dans laquelle le rayon de ce dernier aura été mesuré à partir du point fixe qui lui sert d'origine.

Cet énoncé en résume plusieurs autres, et Pappus le donne comme tel. Les propositions ajoutées au commencement de l'ouvrage par Charmandre fournissent en outre les trois suivants.

2. Si l'extrémité d'une droite de longueur donnée est fixe, son autre extrémité décrit une circonférence de cercle.

3. Si les droites menées d'un point mobile à deux points fixes font un angle constant, le lieu de ce point est une circonférence de cercle.

4. Le lieu du sommet d'un triangle variable dont la base est fixe et l'aire constante, est une ligne droite donnée de position.

5. Si une droite de longueur constante se meut parallèlement à elle-même, et que l'une de ses extrémités glisse sur une droite fixe, son autre extrémité décrira pareillement une ligne droite donnée de position.

6. Si d'un point on mène à deux droites données des obliques sous des angles donnés, et que ces obliques soient entre elles dans un rapport constant, ou bien qu'en ajoutant à l'une d'elles une longueur en raison constante avec la seconde, on obtienne une somme constante, le lieu de ce point sera une ligne droite donnée de position.

7. Étant donné tant de droites qu'on voudra, le lieu du point tel que, menant de ce point à ces droites des obliques sous des angles donnés, la somme des rectangles faits avec l'une de ces obliques et une droite donnée et avec une seconde oblique et une autre droite donnée soit égale au rectangle fait avec une troisième oblique et une troisième droite donnée, et de même pour les autres obliques, est une ligne droite donnée de position.

8. Étant donné deux droites parallèles entre elles, le lieu d'un point tel que, menant de ce point des obliques dans des directions données, elles déterminent sur ces droites, à partir de points donnés, des segments ayant entre eux un rapport constant (ou de telle manière que le produit de ces obliques soit constant, ou encore que la somme ou la différence des aires des polygones respectivement semblables à des

polygones donnés [*], construits sur ces mêmes obliques, soit constante, est une ligne droite donnée de position.

Second livre.

1. Le lieu du point tel, que la différence des quarrés construits sur ses distances à deux points fixes soit constante, est une droite donnée de position.

2. Le lieu du point dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant, est une droite ou une circonférence de cercle [**].

3. Étant donné une droite fixe et sur cette droite un point, de ce dernier menez une oblique et terminez-la en un point tel, que le quarré construit sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite donnée soit égal au rectangle construit sur une droite donnée, et sur la lon-

---

[*] Les géomètres qui se sont occupés de restituer les lieux plans ont supposé que les polygones dont il s'agit devaient nécessairement être semblables entre eux. Mais rien ne justifie cette restriction. En effet, la proposition est vraie lorsque ces polygones sont dissemblables; il suffit que chacun reste semblable à lui-même. D'ailleurs Euclide considère, dans plusieurs propositions du livre des *Données*, des systèmes de polygones qui ne sont pas de même espèce. Il n'est pas problable qu'Apollonius, qui est postérieur à Euclide, ait restreint inutilement la généralité de ses énoncés. J'ai admis en conséquence que les mots *τὰ εἴδη* signifient des polygones respectivement semblables à des polygones donnés, qui peuvent être d'espèce différente.

[**] Cet énoncé et le précédent sont donnés par Pappus en ces termes : « *Ἐὰν ἀπὸ δύο* » *δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ* » *σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας ἢ περι-* » *φερείας.* » On voit par cette citation que je ne me suis pas attaché à traduire mot à mot. Cela m'a paru d'autant plus permis qu'il s'agit d'énoncés dans la plupart desquels Pappus a réuni plusieurs propositions traitées séparément par Apollonius. Je ferai observer qu'on ne peut même pas affirmer que Pappus ait conservé à ces énoncés leur forme primitive. En effet, Eutoce voulant donner un exemple de *lieu plan*, cite, dans son Commentaire sur les *Sections coniques* d'Apollonius, celui que voici : *Δύο δοθέντων σημείων ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ λόγου δοθέντος ἀνίσων εὐθειῶν· δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον, ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.* C'est à-dire, textuellement : *Étant donné dans un plan deux points et le rapport de deux droites inégales, il est possible de décrire dans ce plan un cercle tel, que les droites menées des points donnés à* (un même point de) *la circonférence soient entre elles dans une raison constante, la même que celle qui est donnée* (*Apollonii Pergæi Conicorum libri octo, etc.*; in-folio; Oxford, 1710; pag. 11).

gueur variable mesurée du pied de la perpendiculaire jusqu'au point fixe donné, ou jusqu'à tout autre point fixe situé sur la droite donnée : le lieu de l'extrémité sera une circonférence de cercle donnée de position.

4. Étant donné deux points fixes, le lieu du point tel, que le quarré construit sur la distance à l'un des deux points donnés soit plus grand que le quarré construit sur la distance à l'autre point d'un espace donné qu'en raison [*], est une circonférence donnée de position.

5. Étant donné tant de points qu'on voudra, et des polygones quelconques en même nombre, concevons que d'un point on mène des droites à tous les points donnés, et que sur ces droites on construise des polygones respectivement semblables aux polygones donnés : si la somme des aires des polygones ainsi construits est égale à un espace donné, le lieu de ce point est une circonférence de cercle donnée de position.

6. Le lieu du point tel, que la somme des aires des polygones respectivement semblables à deux polygones donnés, construits sur les droites menées de ce point à deux points fixes, soit égale au rectangle construit sur une droite donnée et sur la distance du pied de la perpendiculaire abaissée du même point sur une droite fixe à un point donné sur cette droite, est une circonférence de cercle donnée de position.

7. Étant donné un point dans l'intérieur d'un cercle donné, si par ce point on mène une droite quelconque et que sur cette droite on prenne un point extérieur tel, que le quarré de la distance de ce point au point donné, ou ce quarré augmenté du rectangle des deux segments situés de part et d'autre du même point dans le cercle, soit égal au rectangle construit sur la droite entière et sa partie extérieure, le lieu du point ainsi déterminé sera une droite donnée de position.

Si cette droite est donnée, ainsi que le point fixe, mais non le cercle,

---

[*] Cette locution *plus grand qu'en raison*, *μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ*, est fréquemment usitée dans le livre des *Données* d'Euclide. Elle s'interprète textuellement en disant que le premier quarré doit être plus grand d'un espace donné que le quarré qui est au second quarré dans la raison donnée. C'est une formule abrégée, comme on en trouve quelques autres en geométrie. Il a été proposé d'autres explications de cette locution, notamment par M. Vincent (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome III, page 9).

et qu'on cherche, sur l'oblique menée de ce point à la droite, deux points qui jouissent de la propriété indiquée, chacun de ces points aura pour lieu une circonférence de cercle donnée de position, la même pour tous les deux.

§ II. — *Lieux du Traité des Connues géométriques.*

C'est à M. L.-Am. Sédillot que nous devons la connaissance des énoncés des propositions dont se compose cet ouvrage du géomètre arabe Hassan-ben-Hassan-ben-Haitem [*]. Plusieurs propositions du premier livre ont pour objet de démontrer que certains lieux géométriques sont *connus*. Dans le Traité des *Lieux plans* d'Apollonius, on démontrait que certains lieux géométriques sont *donnés*. Il y a donc une grande analogie entre les deux ouvrages, du moins en ce qui concerne les *lieux*. Voici ceux que considère le géomètre arabe. Je conserve les numéros qu'ils ont dans la traduction de M. Sédillot.

1. Lieu de l'extrémité d'une droite de grandeur connue, menée d'un point connu de position (2^e^ du I^er^ livre d'Apollonius).

2. Lieu du point obtenu en menant du centre d'un cercle un rayon, et portant ensuite, à partir de la circonférence, sur une droite faisant avec ce rayon un angle connu, une longueur ayant avec le rayon un rayon connu (1^er^ du I^er^ livre d'Apollonius).

3. Lieu obtenu par la même construction, les rayons étant menés d'un point quelconque, et la longueur en rapport connu avec le rayon étant portée sur son prolongement (1^er^ du I^er^ livre d'Apollonius).

4. Lieu obtenu par la même construction, les rayons étant menés d'un point quelconque, et la longueur en rapport connu avec le rayon faisant avec celui-ci un angle connu (1^er^ du I^er^ livre d'Apollonius).

5. Lieu obtenu par la même construction, en substituant à la circonférence connue une droite connue (1^er^ du I^er^ livre d'Apollonius).

6. Lieu du point tel, que menant de ce point des droites à deux points connus, elles comprennent un angle connu (3^e^ du I^er^ livre d'Apollonius).

7. Lieu obtenu en effectuant la même construction, et prolongeant

[*] *Nouveau Journal asiatique*, mai 1834, et *Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et chez les Orientaux*; in-8°; Paris; page 378.

la droite menée à l'un des points connus, de telle sorte que cette droite soit à son prolongement dans un rapport connu (1er du Ier livre d'Apollonius).

8. Lieu des points également distants de deux points connus (2e du IIe livre d'Apollonius).

9. Lieu des points dont les distances à deux points connus, supposées inégales, sont entre elles dans un rapport connu (2e du IIe livre d'Apollonius).

10. Lieu du sommet d'un triangle d'aire constante, dont la base est connue de position et de grandeur (4e du Ier livre d'Apollonius).

12. Lieu du point obtenu en menant entre deux cercles égaux une ligne droite parallèle à la ligne qui joint les deux centres, et prolongeant cette droite à partir de l'une de ses extrémités de manière qu'elle soit à son prolongement dans un rapport connu (5e du Ier livre d'Apollonius).

13. Lieu du point obtenu en menant d'un point connu à une droite connue de grandeur et de position un rayon que l'on prolonge, de manière qu'il soit à son prolongement dans le rapport des deux parties de la droite connue.

14. Lieu du point obtenu en effectuant la même construction, mais de manière que le produit du rayon et de son prolongement soit égal au produit des deux parties de la droite connue.

23. Lieu du point tel, que les quarrés construits sur les droites menées de ce point à deux points connus fassent une somme connue (5e du IIe livre d'Apollonius).

24. Lieu du point qui divise la corde menée dans un cercle connu de grandeur et de position de manière que les deux segments fassent un produit connu.

On voit que, sur ces quinze lieux, il n'y en a que trois qui ne se retrouvent pas parmi ceux de l'ouvrage du géomètre grec. Les énoncés de l'auteur arabe ont d'ailleurs une forme qui rappelle tout à fait celle qu'Eutoce attribue aux énoncés des *lieux plans* d'Apollonius. Si donc Hassan-ben-Hassan a subi l'influence grecque, on ne peut l'attribuer qu'à cet ouvrage d'Apollonius.

RAPPORT

Fait à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 12 décembre 1853, sur un ouvrage intitulé : Traité de Perspective-relief, avec les applications à la construction des bas-reliefs, aux décorations théâtrales et à l'architecture; *par* M. Poudra, *ancien élève de l'École Polytechnique, officier supérieur en retraite au corps d'état-major;*

Par M. CHASLES [*].

L'auteur entend par *perspective-relief* la représentation d'un corps à trois dimensions, au moyen d'une autre figure également a trois dimensions, dont la construction dépend de certaines règles géométriques analogues aux règles de la perspective sur de simples surfaces planes, et qui, de même, présente à l'œil une imitation fidèle.

Ce qui caractérise ce mode de déformation des corps, c'est qu'elle est faite pour une position particuliere et déterminée du spectateur, et que la figure, qui doit produire une illusion parfaite, a avec le modèle dont elle présentera l'apparence, des relations de position et de forme qui satisfont aux deux conditions suivantes : 1° les rayons visuels menés de l'œil du spectateur aux différents points du modele passent par les points correspondants du relief; 2° tous les points en ligne droite dans le modèle se trouvent aussi en ligne droite dans le relief, et, par suite, à des points du modèle situés dans un même plan, correspondent des points du relief situés aussi dans un même plan.

On peut exprimer ces conditions multiples par une seule, en disant simplement qu'à toutes les parties planes du modele correspondent, dans le relief, des parties également planes, lesquelles sont les perspectives des premières sur autant de plans différents et pour une même position de l'œil.

La détermination de ces plans divers, sur lesquels il suffira de

[*] Commissaires, MM. Poncelet et Chasles.

faire de simples perspectives, constitue les règles de ce mode de représentation des corps, appelé *perspective-relief*.

Mais, avant d'entrer dans les détails de cette théorie, nous sommes arrêtés par une question préliminaire qui se présente ici naturellement. Existe-t-il déjà, pour la construction des *bas-reliefs*, des règles géométriques qui servent à guider l'artiste dans sa composition, comme il en existe dans la peinture? Si de telles règles ne sont point observées dans la statuaire, y a-t-il lieu d'en prescrire, seront-elles admises ou ne seront-elles pas regardées comme incompatibles avec le but que l'on se propose dans le bas-relief, et contraires à l'indépendance que demande le génie de l'artiste?

Obligés d'aborder cette question, nous ne l'avons fait qu'avec une extrême défiance de nos lumières; car c'est à une autre Académie qu'il appartiendrait, dans cette circonstance, d'émettre un jugement. Aussi nous nous sommes bornés à interroger, sur ce point, l'histoire de l'art, pour nous renfermer aussitôt dans la partie géométrique qui forme l'objet principal du Mémoire soumis à notre examen.

Il nous faut rappeler brièvement, d'abord, ce qu'on entend par *bas-relief* et *ronde-bosse*. La ronde-bosse est l'imitation complète d'un objet dans ses trois dimensions, conservées les mêmes ou altérées toutes trois dans un même rapport : en terme de géométrie, c'est une figure *semblable* au modèle dont elle reproduit l'image exacte, en quelque lieu que se place le spectateur. Ce genre de sculpture convient spécialement pour la représentation d'un objet peu étendu, tel qu'un personnage : les *bustes* et les *statues* en sont l'application la plus naturelle et la plus fréquente.

On appelle *bas-relief* une construction peu saillante sur un fond plan ou courbe, destinée à représenter l'ensemble de plusieurs objets formant une scène, qui peut occuper, en profondeur surtout, une étendue plus ou moins grande. Les dimensions de cette scène peuvent se trouver singulièrement diminuées en profondeur dans le bas-relief; et l'art du statuaire consiste à inspirer au spectateur, comme fait la peinture sur un simple tableau, *non-seulement le sentiment des formes particulières des diverses parties de la scène, mais aussi le sentiment de leurs positions respectives et des distances véritables des différents plans fuyants sur lesquels elles se trouvent*. Ce sont ces deux conditions réunies qui produiront à l'œil et à l'esprit l'apparence et l'image parfaite du sujet, tel qu'il existe réellement et naturellement ; ce qui est le but le plus élevé que puisse se proposer l'art du bas-relief.

On conçoit que les *décorations théâtrales,* bien qu'on y fasse usage de la peinture et de toutes ses ressources pour produire illusion à l'œil, rentrent essentiellement aussi dans l'art du bas-relief et dépendent des mêmes règles de construction, puisque la perspective s'y fait sur des plans différents et différemment espacés.

Il en est de même de l'architecture des grands édifices, où l'on a à déterminer, d'après ces règles, la disposition des diverses parties du monument, et les formes et proportions de ses ornements, tels que colonnes, statues, pendentifs, etc., eu égard à leur éloignement en profondeur et en hauteur.

La composition des jardins, l'une des branches de l'architecture où l'effet perspectif joue un rôle principal, emprunte encore ses principes à l'art du bas-relief.

Cette science des bas-reliefs n'est donc point circonscrite à l'art plastique proprement dit, et est susceptible, au contraire, d'applications variées et différentes, ayant toutes pour but essentiel l'imitation et l'illusion.

Ce devrait être une raison de nous faire espérer de retrouver dans l'antiquité quelques traces des règles qui ont pu guider les artistes dans leurs compositions. Car on connaît le goût des Grecs et des Romains pour les temples et les théâtres, et l'on sait qu'ils avaient écrit sur la *scénographie,* qui devint un art particulier basé sur les principes de la perspective [*].

La perfection de leurs œuvres en ronde-bosse, attestée par les témoignages d'admiration que plusieurs historiens contemporains nous

---

[*] « Démocrite entreprit, avec Anaxagoras, des recherches sur le plan perspectif et la disposition de la scène des théâtres, et ce fut lui surtout qui fit naître chez les artistes un esprit philosophique propre à les guider. » (O. MULLER, *Manuel d'Archéologie*, § CVIII.) — « Namque primum Agatharcus Athenis, Æschilo docente tragœdiam, scenam fecit, et de ea commentarium reliquit. Ex eo moniti Democritus et Anaxagoras de eadem re scripserunt, quemadmodum oporteat ad aciem oculorum radiorumque extensionem, certo loco centro constituto, ad lineas ratione naturali respondere ; uti de incerta re imagines ædificiorum in scenarum picturis redderent speciem, et quæ in directis planisque frontibus sint figuratæ, alia abscedentia, alia prominentia esse videantur. VITRUVE, lib. VII, præfatio.

ont transmis et par les modèles qui nous en sont parvenus, serait encore une raison qui porterait à penser qu'ils ont dû cultiver aussi avec succès l'art du bas-relief.

Cependant leurs nombreux travaux dans ce genre ne répondent pas à l'idée que nous avons donnée de la destination et du caractère des bas-reliefs envisagés dans leur plus grande perfection, et ont donné lieu, à cet égard, à de vives critiques. Hâtons-nous d'ajouter qu'ils ont eu aussi leurs défenseurs, et disons la cause du dissentiment qui a existé à ce sujet entre les juges compétents dans cette partie des arts d'imitation.

On doit se proposer, avons-nous dit, deux conditions essentielles dans la construction des bas-reliefs : de produire tout à la fois, par une illusion de la vue, une imitation fidèle des formes de toutes les parties du sujet, et le sentiment de leurs positions et de leurs distances naturelles [*]. Or, parfois, ces deux conditions se gênent mutuellement; la seconde surtout, relative aux positions des objets et à la dégradation de leurs distances en profondeur, peut causer de grandes difficultés; et il résulte de là qu'on la sacrifie, en général, soit au désir de donner plus d'expression aux contours et aux formes des parties principales du sujet, soit au besoin de représenter un plus grand nombre de personnages, en les plaçant dans des positions différentes de celles qu'ils pourraient avoir en réalité et naturellement. Aussi faut-il admettre deux manières de concevoir le but et la composition du bas-relief, lesquelles constituent deux styles ou deux écoles distinctes : l'école ancienne, et l'école moderne, qui a pris naissance, avec beaucoup d'éclat, dans le XV^e siècle. Ces deux manières ont leur caractère propre et leur utilité propre, leurs sectateurs aussi et leurs critiques. Celle des Anciens date de l'origine de la sculpture, et nous pouvons dire de l'origine des arts dans l'antiquité la plus reculée. Les Égyptiens l'ont transmise aux Grecs, d'où elle a passé aux Romains, et elle est encore mise en pratique. On admet qu'elle prend sa forme dans l'écriture sacrée des Égyptiens. Une succession de figures dans un bas-relief formait une sorte d'écriture hiéroglyphique, une série d'em-

[*] « La perfection consiste à réunir deux choses : l'une est la ressemblance, et l'autre est la symétrie ou l'accord des proportions. » (ÉMERIC DAVID, *Recherches sur l'art statuaire;* page 133.)

blèmes qui parlaient à l'esprit, et permettaient à l'artiste un développement de faits et de pensées indépendant du but d'imitation pittoresque, par lequel les Modernes ont fait de l'art du bas-relief une œuvre savante.

Plus tard, le système des figures du bas-relief resta fidèle au principe de l'écriture figurative, et, bien que l'art d'imitation partielle de chaque obet fût très-perfectionné, les compositions retinrent toujours l'esprit de leur premier emploi. Chez les Modernes, au contraire, la science du bas-relief a suivi le goût et les errements de la peinture, et prétendit à l'illusion du tableau [*].

Voici comment Perrault, dans son *Parallèle des Anciens et des Modernes*, apprécie le caractère différent des deux écoles :

« Si l'on examine bien la plupart des bas-reliefs antiques, on trouvera que ce ne sont pas de vrais *bas-reliefs*, mais des reliefs de *ronde-bosse* sciés en deux de haut en bas, dont la principale moitié a été appliquée et collée sur un fond tout uni. Il ne faut que voir le bas-relief des Danseuses. Les figures en sont assurément d'une grande beauté, et rien n'est plus noble, plus svelte, plus galant, que l'air, la taille et la démarche de ces jeunes filles qui dansent ; mais ce sont des figures de ronde-bosse sciées en deux, comme je viens de le dire, ou enfoncées de la moitié de leur corps dans le champ qui le soutient. Par là, on connaît clairement que le sculpteur qui les a faites, manquait encore, quelque excellent qu'il fût, de cette adresse que le temps et la méditation ont enseignée depuis, et qui est arrivée de nos jours à sa dernière perfection ; je veux dire cette adresse par laquelle un sculpteur, *avec deux ou trois pouces de relief*, fait des figures qui non-seulement paraissent de ronde-bosse et détachées de leur fond, mais qui semblent s'enfoncer, les unes plus, les autres moins, dans le lointain du bas-relief. »

Le sentiment d'un sculpteur célèbre, Falconet, s'accorde avec ce jugement du savant Littérateur. Après avoir critiqué les bas-reliefs anciens, qui ne produisent point l'imitation des objets naturels, il dit que les règles du bas-relief sont les mêmes que celles de la peinture, au point, qu'*un habile sculpteur doit pouvoir construire un bas-relief*

---

[*] *Voir* QUATREMÈRE DE QUINCY, Description du bouclier d'Achille par Homère. (*Nouveaux Mémoires de l'Académie des Inscriptions ;* tome IV.)

d'après un bon tableau, comme d'après le modèle lui-même; qu'une loi rigoureuse à observer avec la plus scrupuleuse attention, est celle de la juste distance les unes des autres, des diverses figures du sujet, situées sur des plans différents: que c'est surtout dans l'observation de cette regle, que se trouve l'analogie qui existe entre le bas-relief et la peinture; que rompre ce lien, ce serait dégrader la sculpture, et la restreindre entièrement *aux statues*, tandis que la nature lui offre, comme à la peinture, *des tableaux* [*].

Un peintre distingué, Dandré Bardon, professeur à l'École de Peinture et de Sculpture, caractérise de même les deux écoles ancienne et moderne. « Les sculpteurs modernes, dit-il, ont été dirigés » par des vues plus justes et par des connaissances plus étendues que » les Anciens. Ils ont réuni sous un même point de vue les diverses » beautés du bas-relief que l'Antique n'avait exposées que séparément. » Par cet ingénieux assemblage, réunissant les principes des sculptures » de bas-relief et de demi-bosse à ceux des bas-reliefs de ronde-bosse » à plusieurs plans, ils ont enrichi l'art d'un nouveau genre d'ou- » vrages, qui les met à portée d'imiter avec le ciseau tous les effets » de la nature que le pinceau peut retracer [**]. »

Il est inutile de multiplier davantage les citations en faveur de l'école moderne. Mais il faut montrer maintenant que les Anciens ont eu aussi, et peuvent avoir encore leurs défenseurs et leurs partisans.

Nous trouvons dans les *Mémoires de l'Académie des Inscriptions*, un écrit de l'abbé Sallier, lu à l'Académie en 1728, tendant à réfuter les idées émises par Perrault, et à affranchir l'artiste des regles que lui impose l'école moderne. Si dans le bas-relief de la colonne Trajane, dit-il, il n'y a ni perspective ni dégradation, si les figures s'y trouvent presque toutes sur le même plan, si quelques-unes placées derrière les autres y sont aussi grandes et aussi marquées que celles-là, en sorte qu'elles semblent montées sur des gradins pour se faire voir au-dessus des autres; « c'est que l'ouvrier, supérieur aux règles de » son art, avait de justes motifs pour les négliger [***]. »

---

[*] FALCONET, Réflexions sur la sculpture; voir *Œuvres complètes*; 3e édition, tome III, page 37.

[**] DANDRÉ BARDON, *Essai sur la sculpture*; page 59.

[***] *Discours sur la perspective de l'ancienne peinture ou sculpture*; voir *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*; tome VIII, page 97.

M. Quatremère de Quincy, dans son savant article sur les bas-reliefs, écrit pour le *Dictionnaire d'Architecture* de l'Encyclopédie méthodique, prend aussi la défense des Anciens, et atténue les reproches qu'on leur a adressés : il montre le caractère propre et les usages de leurs bas-reliefs; il cherche à prouver que les Anciens parfois ont fait quelques essais dans le genre moderne; que ce genre ne leur était pas absolument étranger; qu'il y a lieu enfin de distinguer dans leurs œuvres le style primitif, à figures isolées et sans action, et plus tard le style perfectionné, où les figures liées ensemble par la composition sont susceptibles de représenter un sujet et d'exprimer une action à laquelle elles concourent ensemble.

« Dès lors, dit-il, les bas-reliefs acquirent la multiplicité des plans » et devinrent des espèces de tableaux, privés de couleurs, il est vrai, » mais susceptibles de rendre et d'exprimer une partie des sujets qui, » jusque-là, n'avaient pu être que du district de la peinture. On vit » les figures disposées sur des plans différents, indiquer, par une dé- » gradation sensible de *relief*, leur plus ou moins grand éloignement : » on les vit, groupées entre elles, former un ensemble de composition, » représenter une action, et, sans cesser d'être utiles à l'histoire, dans » les monuments, se prêter à toutes les inventions du génie, sous le » rapport seul de l'art et du plaisir. »

Cela prouverait donc que les Anciens eux-mêmes avaient eu l'idée d'introduire dans les bas-reliefs les principes de la perspective et les conditions de perfection qui caractérisent le style moderne. Cet aveu, loin d'infirmer le sentiment de Perrault, de Falconet et de Bardon, sur les principes qui doivent présider à l'art du bas-relief, le fortifie, et concourt à former notre jugement sur la convenance et l'utilité des règles géométriques qui font le sujet du Mémoire dont nous avons à rendre compte à l'Académie.

Toutefois, nous devons ajouter que, dans un ouvrage moderne sur la peinture, où l'auteur exprime des idées fort justes sur la nécessité indispensable de l'usage constant des règles de la perspective dans l'art du peintre, nous trouvons, au sujet des bas-reliefs, des idées différentes, qui tendent à infirmer les principes que nous venons d'admettre avec tous les sectateurs de l'école moderne depuis quatre siècles.

L'auteur, après avoir montré le caractère de l'art chez les Anciens, et dit que leurs bas-reliefs doivent être considérés « plutôt comme

» des indications produisant des idées savantes, que comme des insi-
» nuations tendant à tromper la vue, » ajoute : « Les Anciens firent
» donc bien en ne visant point à l'illusion dans les bas-reliefs.... Ils
» ont proportionné leurs saillies selon les véritables règles de l'optique,
» et ils nous offrent les modèles les plus sûrs en cette partie de l'art....
» C'est une règle infaillible, qu'il ne doit rien y avoir de perspectif
» dans les bas-reliefs, les camées, les pierres gravées, et que *tout y*
» *doit être orthographique* [*]. »

Opinion étrange, mais dont on se rend compte jusqu'à un certain point, en considérant que l'auteur part d'un principe qui change la destination propre des bas-reliefs, puisqu'il dit qu'on ne doit pas les regarder « comme des insinuations tendant à tromper la vue. »

Ne nous arrêtons pas davantage sur ce point. Passons au temps où l'art du bas-relief a pris, chez les Modernes, son caractère d'imitation, et cherchons à découvrir les règles qu'on a pu suivre pour lui donner ce haut degré de perfectionnement.

C'est à un peintre et sculpteur célèbre du XV^e siècle, Laurent Ghiberti, qu'est due cette innovation dans la statuaire et l'impulsion heureuse qui s'en est suivie dans les arts d'imitation.

S'étant présenté, en 1401, au concours ouvert pour le projet d'une des portes du baptistère de l'église de Saint-Jean, à Florence, Ghiberti employa dans ce travail toutes les ressources de la perspective linéaire dont il faisait usage avec grand succès dans la peinture. Son projet eut l'approbation unanime de ses juges et de ses concurrents; et, plus tard, l'exécution d'une seconde porte lui fut confiée, et lui donna lieu de se surpasser lui-même dans un second chef-d'œuvre. Il suffira de rappeler, pour faire apprécier le mérite de ce travail, que les deux portes faisaient l'admiration de Michel-Ange, qui les trouvait dignes d'être *les portes du Paradis* [**]. C'est ainsi qu'on a continué, depuis lors, de les appeler.

Ce succès de Ghiberti fut l'origine de la nouvelle école fondée sur l'emploi de la perspective. Ce genre se retrouve dans la plupart des bas-reliefs des sculpteurs célèbres du XV^e et du XVI^e siècle, dans ceux,

[*] PAILLOT DE MONTABERT, *Traité complet de la Peinture;* voir tome II, pages 36 et 39.

[**] G. VASARI, *Vies des peintres, sculpteurs et architectes;* voir l'article de Lorenzo Ghiberti, sculpteur florentin.

notamment, de Jean Goujon, de Cousin, de Bontems, de Germain Pilon, de Desjardins.

Dans le XVII^e siècle, le bas-relief fit un nouveau pas, qui lui permit de rivaliser avec la peinture dans les tableaux historiques en grand. Ce fut Algardi, célèbre sculpteur italien, qui conçut et réalisa cette extension de l'art, en composant en bas-relief un vaste tableau d'histoire. Son succès fut prodigieux, et dès ce moment le bas-relief devint une nouvelle manière de peindre, dont les principes se confondirent avec ceux de la peinture proprement dite [*].

Nous conclurons de cet aperçu rapide des progrès de la sculpture, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, qu'il faut distinguer dans l'art du *bas-relief*, l'école ancienne et l'école moderne, ainsi que nous l'avions annoncé, et que les ressources de celles-ci, inconnues à la première qui, du moins, n'en a fait que rarement et faiblement usage, sont dues à l'emploi des principes de la perspective dans la représentation des diverses parties du sujet et dans la dégradation de leurs distances selon l'éloignement.

Cette conclusion résout la question que nous nous étions proposée, et nous pouvons dire, avec les grands maîtres et les plus judicieux appréciateurs de leurs œuvres, que, pour donner à l'art du bas-relief toute l'extension et la perfection d'exécution dont il est susceptible, il faut l'assujettir aux règles rigoureuses de la perspective, comme la peinture y a été assujettie si heureusement vers la même époque du XV^e siècle [**].

---

[*] QUATREMÈRE DE QUINCY, *Dictionnaire d'Architecture* de l'Encyclopédie méthodique; voir article *Bas-relief*, page 242.

[**] Pietro della Francesca, aussi appelé Pietro dal Borgo-San-Sepolcro, du nom de sa ville natale, excellent peintre du XV^e siècle, qui passait aussi pour le plus savant géomètre de l'époque, est regardé comme le principal promoteur de la perspective linéaire. Ce savant artiste laissa, entre autres écrits mathématiques, que la cécité dont il fut frappé dans sa vieillesse l'empêcha de mettre en lumière, un *Traité de Perspective* en trois livres, dont plusieurs auteurs ont fait mention, en exprimant toujours le regret que cet ouvrage important, qui marquait une ère nouvelle dans l'art de la peinture, soit resté inédit et même inconnu, au point que, depuis longtemps, on le croit perdu pour toujours. Mais nous sommes heureux de pouvoir dire qu'il en existe, à notre connaissance, une copie ancienne qui a fixé l'attention d'un érudit distingué, amateur des beaux-arts; qu'il y a donc lieu d'espérer que la publication de cet ouvrage,

Mais quelles sont ces règles rigoureuses empruntées des principes de la perspective, que les sculpteurs modernes ont appliquées avec un si grand succès, qu'elles doivent être regardées comme le véritable fondement de l'art du bas-relief? Ici nous rentrons essentiellement dans la tâche qui nous est imposée.

Pour donner à la question que nous venons de poser l'expression et le sens mathématique qui lui conviennent, nous dirons : *Un sujet ou modèle étant donné, comment formera-t-on une nouvelle figure, un relief, selon l'expression technique, présentant dans tous les sens, des dégradations de distances telles que celles qui s'observent dans la simple perspective sur une surface plane.*

Cette question constitue un beau problème de Géométrie, indépendamment de ses applications à l'art du bas-relief. Nous attachions un vif intérêt à retrouver dans quelques écrits des sculpteurs célèbres qui ont suivi Ghiberti dans son heureuse innovation, au moins l'indication des règles qu'ils ont dû observer pour résoudre pratiquement ce problème. Mais malheureusement ils gardent tous le silence. Cependant Ghiberti avait écrit un Traité sur la sculpture, où il faut croire qu'il avait consigné quelques règles pratiques; mais cet ouvrage est resté manuscrit. On dit qu'il existe encore dans une des bibliothèques de Florence. Faisons des vœux pour qu'il fixe, un jour, l'attention du gouvernement grand-ducal, ou de quelque amateur zélé des arts et de la science.

On peut, en l'abscence de toute tradition, concevoir que les règles que les artistes auront observées dans leurs bas-reliefs se soient offertes assez naturellement à l'esprit, et aient été très-simples. Si l'on suppose, par exemple, qu'une série de plans verticaux et parallèles dans le modèle soient représentés dans le bas-relief par d'autres plans verticaux parallèles à ceux-là, cas assez ordinaire, il n'y aura plus qu'à fixer les distances mutuelles de ces nouveaux plans; car les positions des différents points qu'il faudra marquer sur ces plans, comme appartenant au bas-relief, seront sur les rayons visuels menés du lieu du spectateur aux points du modèle. Or, puisque ce sont les règles de la perspective qu'on se propose d'appliquer ici, on a dû faire natu-

auquel s'attache un intérêt historique réel, viendra combler une lacune dans l'histoire de la science et de l'art.

rellement la dégradation des distances des nouveaux plans selon les règles de l'*échelle fuyante* en usage dans la perspective linéaire. On sait qu'on appelle *échelle fuyante* ou *échelle perspective* la perspective d'une *échelle géométrale,* c'est-à-dire d'une droite divisée en parties égales. Les divisions en perspective, loin d'être égales comme les premières, vont en diminuant indéfiniment et tendent à devenir nulles en s'approchant du *point de fuite*, qui correspond au point de la division géométrale qui serait à l'infini. Ayant donc une série de plans verticaux parallèles entre eux dans le modèle, pour déterminer les plans verticaux parallèles dans le bas-relief, il suffira de mener arbitrairement une droite transversale, et de faire une perspective de cette droite et de ses points de division marqués par les plans du modèle qu'elle traverse; les points en perspective appartiendront aux plans d'un bas-relief, lesquels seront ainsi déterminés.

Ce mode de construction s'appliquera naturellement aux décorations théâtrales.

On conçoit donc comment les artistes auront pu sans difficulté introduire les règles de la perspective dans la construction des bas-reliefs et des œuvres du même genre. On peut penser que l'expérience leur aura fait reconnaître ensuite quelques-unes des propriétés principales des figures ainsi construites, comparées au modèle. Par exemple, qu'une surface plane quelconque dans le modèle se trouve représentée par une autre surface plane dans le relief, et par suite qu'une ligne droite est représentée par une ligne droite. Ils auront pu reconnaître encore qu'aux points de l'espace situés à l'infini et considérés comme appartenant au modèle, correspondent dans le bas-relief des points situés tous dans un même plan. Mais les deux figures, le modèle et le bas-relief, ont entre elles diverses autres relations de position et de grandeur, qui sont, sans doute, restées inconnues aux sculpteurs. Il était réservé à la science proprement dite de les découvrir et de les mettre à profit pour créer une belle méthode en Géométrie spéculative, dont nous parlerons bientôt.

Le premier ouvrage dans lequel nous trouvons quelques règles pour la construction des bas-reliefs, est le *Traité des pratiques géométrales et perspectives* du célèbre graveur Abraham Bosse, professeur de perspective à l'Académie royale de Peinture et de Sculpture.

L'auteur dit que « ceux qui se mêlent de faire des bas-reliefs, sans » savoir la perspective, y font de grandes méprises, ne discernant » pas les parties que l'œil en doit ou ne doit pas voir; que les vrais » bas-reliefs ne doivent être considérés ou vus que d'un seul endroit, » ainsi qu'un tableau de plate peinture, et doivent avoir peu de relief.

» Et comme en ne sachant pas, continue-t-il, les beaux effets des » regles de l'optique et perspective, l'ouvrier croit que faisant ainsi » son ouvrage, il ne ferait pas à l'œil assez d'effet de relief; il prétend » y suppléer pour en donner beaucoup aux premiers objets, et ainsi il » vient à faire, sans y penser, du géométral, ou ronde-bosse en de- » vant, et du perspectif dans l'éloignement, ou bien du relief per- » spectif difforme.

» Mais ceux qui savent le moyen de faire paraître a l'œil un objet » d'un demi-pouce de saillie, composé de lignes courbes, en avoir trois » ou quatre à mesure qu'il s'en éloigne, et de faire les *échelles per-* » *spectives* pour pratiquer ces deux sortes de travail par ébauche et au » ciseau, et aussi les plans géométraux et perspectifs comme aux » tableaux, suivant le peu d'épaisseur que l'on doit donner au bas- » relief, sont bien plus assurés et mieux fondés. »

La règle de construction que donne Bosse, à la suite de ces observations, ne diffère pas, au fond, de celle dont nous avons indiqué ci-dessus le principe et qui dérive naturellement des usages de l'*échelle fuyante* dans la perspective ordinaire. Aussi, l'auteur l'intitule en ces termes : *Faire les échelles perspectives pour les bas-reliefs*.

Bosse possédait, on le sait, des connaissances mathématiques qui lui permettaient de traiter avec intelligence toutes les questions de la perspective et de la coupe des pierres; cependant il tenait à honneur de n'être que le propagateur des conceptions de Desargues, et de n'enseigner dans ses propres ouvrages, ainsi que dans ses *Leçons à l'Académie de Peinture et de Sculpture*, que les méthodes de ce savant géometre, digne contemporain et ami de Descartes, de Fermat et de Pascal. On peut donc penser que les principes de construction des bas-reliefs sont empruntés de Desargues; d'autant plus que Bosse nous apprend qu'il possédait encore de ses ouvrages en manuscrit. C'est là un nouveau service rendu aux beaux-arts par l'habile géomètre, à qui sont dues, parmi tant d'autres conceptions heureuses, des méthodes faciles pour la perpective linéaire, et surtout les principes de la perspective aérienne, pour *la dégradation des couleurs* et *le fort et le faible* dans le tracé des contours, selon leur éloignement sur l'échelle fuyante; véritables règles de la peinture [*].

Ce n'est qu'un siècle plus tard, que nous trouvons un second écrit sur les bas-reliefs, dans un ouvrage intitulé : *Raisonnement sur la Perspective, pour en faciliter l'usage aux artistes*, par Petitot, architecte (imprimé à Parme, 1758, in-4°). Le chapitre relatif aux bas-reliefs est très-succinct, et la construction indiquée repose sur le même principe que celle de Bosse, savoir, la division de l'épaisseur du bas-relief conformément à l'échelle fuyante de la perspective. L'auteur dit que cette manière facile de régler les saillies d'un bas-relief est d'autant plus nécessaire, qu'elle paraît nouvelle, et qu'elle servira à corriger entièrement les fautes des saillies et de perspective qui échappent ordinairement lorsqu'on n'est guidé que par le goût. Il applique la méthode à la statue du Gladiateur antique, qu'il prend pour modèle et qu'il se propose de représenter en bas-relief.

Cependant ces règles succinctes de Bosse et de Petitot étaient incomplètes en principe et dans l'application, et ne formaient point une théorie des bas-reliefs. Le premier ouvrage dans lequel, à notre connaissance, la question ait été envisagée sous un point de vue géométrique, quoique encore exclusivement pratique, date de la fin du siècle dernier. Cet ouvrage, écrit en allemand, a pour titre : *Essai sur la perspective des reliefs*, par Breysig, professeur à l'École des Beaux-Arts de Magdebourg (in-8°, 1792).

L'auteur, après avoir défini l'objet des bas-reliefs, dit qu'il s'étonne que depuis longtemps il ne se soit pas rencontré un géomètre qui, stimulé par le sentiment de l'art, se soit imposé la tâche

---

[*] On sait combien ces principes prescrits par Desargues ont suscité d'opposition dans son temps, de la part d'une foule de gens qui, n'ayant puisé leurs connaissances mathématiques qu'au point de vue restreint de la pratique, et étant dès lors peu capables d'en faire une application intelligente et d'en comprendre le sens et le vrai caractère, se croyaient très-supérieurs au *géomètre spéculatif, demi-savant* à leurs yeux. L'erreur de ces détracteurs de la science, et leur animosité à l'égard du géomètre qui signalait leur ignorance, furent telles alors, que défense officielle fut faite à Bosse de laisser le nom de Desargues dans les ouvrages qu'il se proposait de publier sous les auspices de l'Académie de Peinture et de Sculpture; défense à laquelle il répondit : *Qu'en homme d'honneur il ne devait ni ne pouvait l'en ôter.*

de trouver des règles sûres et invariables qui puissent être appliquées aux travaux de sculpture en relief. Ce sont ces règles mathématiques qu'il se propose de donner.

Il entre d'abord dans des considérations assez développées sur les regles d'esthétique, eu égard à l'usage auquel sera destiné le bas-relief que l'on se propose de construire. Laissons ces remarques intéressantes, pour arriver tout de suite à la partie mathématique de l'ouvrage, aux règles de construction, la seule qui soit ici de notre ressort.

Le procédé de l'auteur est extrêmement simple et a beaucoup d'analogie avec une des pratiques les plus usitées de la perspective. En effet, dans la perspective ordinaire sur un plan ou tableau, on détermine l'image d'une droite au moyen de deux points, qui sont ceux où cette droite et sa parallèle conduite par l'œil rencontrent le tableau; la droite menée par ces deux points forme la perspective de la droite proposée.

En perspective-relief, l'auteur prend deux plans parallèles, entre lesquels sera compris le bas-relief, qu'il appelle, l'un *plan plastique* ou *tableau*, et l'autre *plan principal*. Une droite appartenant au modèle est représentée dans le bas-relief par une autre droite déterminée au moyen de deux points, l'un desquels est le point où la droite du modèle perce le plan *plastique*, et l'autre le point où la parallèle à cette droite, conduite par l'œil, perce le plan *principal*; la droite qui joint ces deux points est la *perspective-relief* de la droite du modèle. Il est clair que la construction des différents points du bas-relief, ainsi que des plans qui s'y trouvent, découle immédiatement de cette construction d'une droite.

Si l'on suppose que le plan *principal* s'approche indéfiniment du plan *plastique*, le bas-relief s'aplatira indéfiniment, et, à la limite où les deux plans coïncident, le bas-relief devient une simple perspective linéaire sur le plan *plastique*. Ce qui montre l'analogie qui existe entre ce procédé de construction des bas-reliefs et la perspective sur une surface plane.

L'auteur donne encore deux autres méthodes, mais elles ne different point, au fond, de la première, et elles n'en sont que des applications particulières qui ne renferment point une idée nouvelle.

Il avait annoncé qu'il ferait suivre cet ouvrage d'un second, dans lequel il entrerait dans de plus grands détails concernant la perspective-relief. Nous ignorons si ce projet s'est réalisé : on peut en douter, car nous ne trouvons aucune mention historique, ou simplement bibliographique, d'un second ouvrage sur le même sujet. Il paraît même que celui dont il vient d'être question a été peu répandu, et qu'il n'a pas eu le degré d'utilité et l'influence sur les progrès de l'art, que l'auteur en espérait.

Peut-être faut-il attribuer cet insuccès à deux causes naturelles. D'une part, bien que l'ouvrage repose sur des considérations mathématiques rigoureuses, plus développées que dans ceux de Bosse et de Petitot, il est néanmoins, tout à fait étranger par la forme et le style, autant que par le sujet, aux considérations théoriques qui auraient pu fixer l'attention des géomètres et les engager à s'occuper de cette question. Et d'autre part, il n'était probablement pas assez approprié aux idées et aux habitudes des artistes, pour qu'il leur parût se rattacher essentiellement à l'objet précis de leurs travaux.

Mais depuis, cette question des bas-reliefs a été traitée, incidemment et brièvement, il est vrai, dans un ouvrage de pure Géométrie, avec la précision et la clarté qui sont le caractère des théories mathématiques considérées dans toute leur généralité et le degré d'abstraction qu'elles comportent. Nous voulons parler du *Traité des Propriétés projectives des figures*. L'auteur ayant en vue, dans le supplément joint à cet ouvrage, d'appliquer aux figures à trois dimensions la méthode empruntée des principes de la perspective linéaire pour la démonstration des propriétés des figures planes, imagina un procédé analogue de déformation des figures à trois dimensions, qu'il appela *Théorie des Figures homologiques*, ou *Perspective-relief*.

Dans ces figures, les points se correspondent deux à deux, et sont sur des droites concourantes en un même point appelé *centre d'homologie*, et des droites correspondent à des droites, et par suite des plans à des plans; en outre, deux droites correspondantes, de même que deux plans correspondants, se coupent mutuellement sur un même plan fixe appelé *plan d'homologie*.

Après avoir fait un usage très-étendu de cette méthode, comme moyen de démonstration et de découverte en Géométrie rationnelle, M. Poncelet montra que deux figures homologiques réunissent toutes les conditions que l'on doit observer dans la construction des bas-reliefs et dans les décorations théâtrales.

Par cette remarque, il fit rentrer cette branche des arts d'imitation dans les applications d'une théorie géométrique très-simple par elle-même et qui permettait de substituer des règles sûres et faciles à des tâtonnements incertains, à des recherches mal définies et peu heureuses le plus souvent. M. Poncelet ajoute « qu'il laisse aux ar- » tistes instruits le soin de développer ces idées de la manière conve- » nable, pour les mettre à la portée de ceux qui exécutent [*]. »

Toutefois ce n'était point là l'œuvre réservée aux artistes proprement dits, quel que fût leur mérite, parce qu'elle exigeait nécessairement le géomètre habitué aux spéculations de la science, le seul auquel il appartienne de traiter les questions mathématiques avec la précision et la lucidité qui en aplanissent toutes les difficultés.

M. Poudra, ancien élève de l'École Polytechnique et professeur au corps d'état-major, s'est proposé de donner suite à la pensée de l'auteur du *Traité des Propriétés projectives des figures*, ce qui l'a conduit à composer l'ouvrage dont l'Académie nous a chargés de lui rendre compte. Mais tout ce que nous venons de rappeler en fait bien comprendre le but, et rend à présent notre tâche facile.

Cet ouvrage est divisé en deux parties : dans la première, l'auteur traite, sous un point de vue général, de la construction des figures *homologiques*, ou *perspective-relief* ; et dans la seconde, des applications particulières de cette théorie à la construction des *bas-reliefs* proprement dits, aux décorations théâtrales, et à l'architecture des grands édifices. Il donne ensuite des règles générales d'harmonie et de convenance à observer, selon les différents cas que rencontrent ces travaux d'art, dont l'objet propre est de donner à une représentation limitée l'apparence fidèle de la nature, par des effets d'illusion de la vue.

---

[*] Notre confrère, M. Ch. Dupin, a aussi reconnu que l'art des bas-reliefs est soumis aux règles précises de la science de l'étendue. Le savant géomètre exprime, à ce sujet, des idées succinctes, mais fort justes, dans le discours préliminaire des *Applications de Géométrie et de Méchanique* (in-4°, 1822), où il dit : « La sculpture des » bas-reliefs est plus qu'une simple projection des objets à représenter ; elle est » moins que le relief même des objets naturels. C'est encore à la Géométrie qu'il » appartient de régler les dégradations de forme, de grandeur et de position, qui ser- » vent à distinguer les objets rejetés sur des plans plus ou moins éloignés, ou placés » au premier plan de ces travaux à trois dimensions, dans lesquels le ciseau, par ses » prestiges, doit égaler la magie des chefs-d'œuvre de la palette et du pinceau. »

Méthodes générales de construction des figures homologiques.

L'auteur expose plusieurs méthodes : nous en distinguerons cinq, les autres n'étant que de simples modifications de celles-là, ou présentant des procédés mixtes qui en dérivent.

La première méthode, laquelle pouvait se présenter assez aisément à l'esprit, à raison de son analogie avec la pratique la plus usitée en perspective linéaire, ne diffère pas, au fond, de celle de Breysig que nous avons fait connaître. Dans cette méthode, on se sert de la position du point de l'œil et de deux plans parallèles, dont l'un est le *plan d'homologie*, plan commun aux deux figures, et l'autre, le plan qui, dans la figure que l'on construit, correspond à l'infini considéré comme appartenant à la figure proposée. Ces deux plans sont, respectivement, le plan *plastique* et le plan *principal* dont il a été question précédemment. M. Poudra ne donne pas de dénomination technique au second ; il le désigne simplement par la lettre I, initiale du mot *infini*. M. Poncelet, qui, le premier, a introduit en Géométrie rationnelle la considération de ce plan, devenue depuis si utile, ne l'a point dénommé non plus. Mais il semble que, par analogie avec la perspective ordinaire, où l'on considère les *points de fuite* qui sont les perspectives des points situés à l'infini, on soit conduit naturellement à l'appeler ici le *plan de fuite*. Nous adopterons cette dénomination, qui nous est nécessaire, car ce plan joue un grand rôle dans la théorie et l'exécution des bas-reliefs [*].

---

[*] Depuis que ce Rapport a été lu à l'Académie, nous avons appris qu'un géomètre allemand, M. C.-T. Anger, président de la Société des Naturalistes de Dantzick, a tiré de l'oubli l'ouvrage de Breysig, se proposant principalement d'exprimer en analyse les règles de l'auteur pour la construction des figures-reliefs. Ce travail, qui est le sujet d'un premier Mémoire, paru en 1834, sous le titre : *Analytishe Darstellung der Basrelief-Perspective*. Danzig, 11 p. in-4°, a été complété dans deux autres écrits qui ont pour titres : 1° *Beiträge zur analytischen Basrelief-Perspective*. Danzig, 1846, 16 p. in-4°. 2° *Ueber die Transformation der Figuren in andere derselben Gattung*. p. 281-290 du Recueil périodique de M. J.-A. Grunert : *Archiv der Mathematik und Physik*. Greifswald, t. IV, ann. 1844.

L'auteur appelle *plan d'évanouissement* (*Verschwindungfläch*) le plan que Breysig appelait *plan principal* (*hauptfläche*), et que nous avons nommé ci-dessus *plan de fuite*.

M. Anger s'est encore occupé de l'art des représentations perspectives dans deux autres ouvrages que nous indiquerons ici par leurs titres : 1° *Zur Theorie der Perspective für Krumme Bildflächen, mit besonderer Berücksichtigung einer genauen*

Dans sa deuxième méthode, l'auteur réduit toute la construction à une simple perspective du modèle sur un plan. A cet effet, il conçoit que de chaque point du modèle on ait abaissé sur un plan de projection horizontal des verticales dont les pieds forment la projection du modèle proposé. Il construit, sur le plan d'homologie, pour une certaine position auxiliaire de l'œil, différente du centre d'homologie, une perspective de cette projection et des verticales; puis, il fait tourner ce plan autour de la ligne de terre pour l'abattre sur le plan horizontal, et il relève perpendiculairement à ce plan. les perspectives des verticales en les faisant tourner autour de leurs pieds; la figure formée par les extrémités de ces nouvelles verticales est la figure homologique qu'on se proposait de construire.

Dans la troisième méthode, on fait deux perspectives du modèle proposé sur deux plans rectangulaires, en prenant deux positions auxiliaires de l'œil. différentes, mais dépendantes de la position du centre d'homologie. Ces deux perspectives sont regardées comme les projections orthogonales d'une même figure de l'espace, laquelle est la figure homologique demandée.

La quatrième méthode se sert d'un certain plan appartenant au modèle, parallèle au plan d'homologie, et correspondant à l'infini considéré dans la figure que l'on veut construire. Ce plan et le *plan de fuite* sont à égale distance du point milieu entre le *centre* et le *plan d'homologie*. Ici l'on obtient sur-le champ la *perspective-relief* d'une droite en menant par le point où cette droite rencontre le plan d'homologie, une parallèle à la droite qui va de l'œil au point de rencontre de la proposée et du plan dont nous venons de parler.

La cinquième méthode rapporte chaque point du modèle à trois plans coordonnés rectangulaires zx, xy et yz, qui sont, respectivement, le plan d'homologie supposé vertical, le plan horizontal mené par l'œil, et le plan vertical, aussi mené par l'œil, perpendiculairement au plan d'homologie. Les coordonnées d'un point du modèle étant x, y, z, et celles du point correspondant dans la figure homologique, x', y', z', celles-ci ont pour expression

$$x' = x \cdot \frac{D}{D+y}, \quad y' = y \cdot \frac{E}{D+y}, \quad z' = z \cdot \frac{D}{D+y};$$

Construction der Panoramen. 4 p. in-f°, 1850. 2° *Untersuchungen über die perspectivische Verzerrung*. 16 p. in-4°, 1851.

D et E sont les distances du plan de fuite au centre et au plan d'homologie.

Chacune de ces méthodes de construction pourra avoir ses avantages particuliers dans les applications pratiques. Ainsi la deuxième, où la construction se réduit à une perspective plane, pourra paraître très-simple aux artistes déjà familiarisés avec la perspective linéaire : il en sera de même de la troisième méthode, où l'on emploie deux perspectives sur deux plans différents. Les formules de la cinquième méthode pourront paraître plus commodes que les constructions géométriques, lorsqu'il s'agira de très-grands bas-reliefs, comme dans les frontons des grands édifices.

Observations relatives au plan de fuite.

La considération du plan de fuite répand beaucoup de clarté sur toute la théorie des figures homologiques et ses applications. Aussi l'auteur fait-il un grand usage de ce plan, qui, cependant, en général, ne fait pas partie des données à priori de chaque question. On le détermine au moyen de ces données, et ensuite il est d'un utile secours théorique et pratique. Mais il est à remarquer que ce plan ne peut jamais figurer en réalité dans les bas-reliefs, ni dans aucune des constructions qui dépendent des mêmes règles. Car on n'a à imiter, dans ces travaux, que les seuls objets que l'œil verrait effectivement dans la nature; de sorte que le fond d'un bas-relief, de même que le fond de la scène dans les décorations théâtrales, ne doit rien contenir de ce qui existe au delà des limites naturelles de la vue : et souvent ce sont des distances beaucoup moins profondes que l'on y représente.

Mais il est vrai aussi qu'à raison de la dégradation des distances en profondeur, le lieu qu'occuperait le plan de fuite peut n'être que très-peu au delà de celui qui forme le fond du bas-relief.

Dans tous les cas, la considération de ce plan est extrêmement importante, parce que c'est toujours sur ce plan lui-même que doivent concourir virtuellement les lignes par lesquelles on représente, dans le bas-relief, des droites parallèles dans le modèle. Il y a lieu surtout de tenir compte de cette circonstance dans les décorations théâtrales, comme nous le dirons.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, se trouvent les applications des divers procédés de construction des figures homologiques à la construction des *bas-reliefs* proprement dits. L'auteur indique quelle sera, selon les différents cas, la méthode la plus pratique, et, en tenant compte des procédés d'exécution en usage dans la sculpture, il énumère les diverses opérations successives qu'on aura à effectuer. Il montre quelles sont les limites dans lesquelles se renferme le secours précieux de la Géométrie, et au delà desquelles tout appartient à l'habileté et au génie de l'artiste, soit pour le choix des données les plus convenables, soit pour l'exécution; de même que, dans la peinture, le simple tracé des contours, par les lois rigoureuses de la perspective, laisse encore toute latitude aux inspirations et au talent du peintre.

Détermination des ombres sur un bas-relief.

En général, on ne fait pas usage, dans les bas-reliefs, des effets d'ombre et de lumière qui sont d'un secours si puissant dans la peinture. Cependant il existe des bas-reliefs où l'on a eu recours à ce moyen d'accroître l'illusion, et il est en usage nécessairement dans les décorations théâtrales.

Si les ombres étaient effectivement marquées sur le modèle que l'artiste aurait sous les yeux, on conçoit que, pour les déterminer sur le bas-relief, il suffirait d'en faire la simple perspective sur sa surface; mais on peut se proposer de tracer directement sur le bas-relief les ombres qui correspondraient, dans le sujet, à une direction donnée des rayons lumineux. L'auteur apprend à le faire, en observant que ce ne sont plus des rayons lumineux parallèles qu'il faut prendre dans le bas-relief, mais bien des rayons émanant d'un même point situé à distance finie. Ce point se trouve toujours dans le plan de fuite.

Application à l'architecture.

On sait que, dans les compositions architecturales, on a recours souvent aux effets d'illusion, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur des édifices.

Dans l'intérieur, on se proposera, par exemple, d'accroître en apparence la profondeur, ou de faire voir, dans des dimensions naturelles, des objets tels que des statues et autres ornements qui, nécessairement, devront avoir des dimensions différentes et des proportions diverses, selon leur éloignement et leurs positions respectives. A l'extérieur, on se proposera de produire les mêmes effets d'illusion, par les inclinaisons du sol conduisant à l'édifice, et par la forme et les dimensions de ses parties principales et de ses ornements accessoires. qui devront contribuer tous au même effet général.

On connaît des monuments remarquables construits dans ces vues. Il suffit de citer l'église de Saint-Pierre de Rome, où l'on admire. tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, des effets d'illusion surprenants.

Plusieurs architectes ont écrit sur cette partie de leur art; toutefois, ils n'ont indiqué que vaguement quelques moyens pratiques de produire ces grands effets.

Cependant la théorie des apparences a été cultivée dans tous les temps, même chez les Anciens; car c'est à elle que se rapportent le Traité d'Optique d'Euclide, celui d'Héliodore Larissée, l'Optique de Ptolémée, et, plus tard, les ouvrages d'Alhazen, de Roger Bacon, de Vitellion, et beaucoup d'autres chez les Modernes. Mais, dans tous ces ouvrages, on ne considère les apparences qu'eu égard à l'ouverture des angles visuels sous lesquels on aperçoit les objets de la nature, selon leurs diverses positions, sans se proposer de produire une imitation par la substitution d'objets différents. Et ce n'est que d'une manière incertaine et empirique qu'on a appliqué cette partie de l'optique aux constructions. Aussi tous les essais n'ont-ils pas eu toujours un succès heureux.

M. Poudra, en rattachant cette théorie des apparences à celle des figures homologiques, semble avoir établi le lien naturel qui devait unir ces deux parties de la science pour constituer la véritable théorie des apparences architecturales, d'où dérivent des règles sûres qui seront d'un puissant secours pour tous les artistes, même ceux qui pourraient se fier uniquement à leur expérience et aux inspirations de leur génie. Il indique encore la belle théorie des contrastes des teintes et des couleurs de M. Chevreul, par lesquels on modifie si essentiellement l'apparence des objets, comme pouvant offrir aussi des ressources qu'un architecte habile pourra mettre à profit.

L'auteur développe ces principes et en fait la base de réflexions et de rapprochements qu'il applique à plusieurs des beaux monuments de la capitale, l'Arc de Triomphe, la place de la Concorde, la cour du Carrousel, le Louvre, etc. Nous ne ferons aucune observation sur ces détails particuliers qui rentrent essentiellement dans l'esthétique de l'art, et qui demanderaient des juges spéciaux et compétents. Toutefois, nous remarquerons qu'un fait récent vient indiquer que les idées émises par l'auteur peuvent bien n'être pas dépourvues de justesse. Les embellissements de la cour du Louvre, au moment où il présentait son Mémoire à l'Académie, lui suggéraient quelques réflexions critiques : or, ils ont été remplacés, depuis, par un système d'embellissements différents, dictés par un sentiment délicat des convenances mêmes du monument.

Décorations théâtrales.

Les Anciens ont appliqué aux décorations théâtrales, de même qu'à l'architecture, la théorie des apparences, et ils ont dû y joindre nécessairement quelques notions de perspective.

Plusieurs auteurs, à la Renaissance, ont écrit d'une manière spéciale sur cette question, et y ont introduit quelques principes inconnus aux Anciens, ou, du moins, qu'ils n'ont pas appliqués.

En effet, il paraît qu'alors on opérait comme si la toile du fond qui doit représenter, ou la limite de la vue dans la nature, ou des objets plus rapprochés, eût pu contenir aussi la représentation des points situés à l'infini : ce qui était une erreur causée par l'ignorance où l'on était alors des vrais principes qui doivent guider dans cette partie des arts d'imitation. Le célèbre architecte Sébastien Serlio est celui qui paraît avoir aperçu, le premier, cette erreur, car on lit dans son *Traité de Perspective* ce passage intéressant :

« Certains architectes ont posé l'horizon dans la dernière muraille
» qui termine la scène, ce qui les force à relever le plan duquel sort
» ladite muraille, où il semble que tous les bâtiments s'y rencontrent.
» Je pensai en moi-même que je ferais passer cet horizon plus en ar-
» rière, et cela me succéda si bien, que, depuis, j'ai toujours suivi
» cette voie, laquelle je conseillerais à tenir à tous ceux qui se délec-
» tent de choses semblables. »

C'est-à-dire qu'ayant le sentiment du plan sur lequel doivent concourir toutes les droites qui représentent des droites parallèles dans la nature, on prenait, pour ce plan, le fond même de la scène : erreur grave, car ce plan doit se trouver beaucoup au delà.

Mais, après avoir reconnu cette erreur, Serlio ne donne pas de règle pour déterminer la véritable position virtuelle de ce plan.

Il paraît que ce fut, bientôt après, Guido Ubaldi, savant géomètre dont le nom figure, comme on sait, dans plusieurs parties des sciences mathématiques, qui découvrit, le premier, cette position; et peut-être même verra-t-on, dans cet endroit, une première mais faible idée de la théorie des bas-reliefs. En effet, supposant l'œil au fond de la salle, à une certaine hauteur, il donne au sol de la scène une légère pente ascendante vers le fond, et concevant un plan horizontal conduit par l'œil, lequel, prolongé suffisamment, rencontrera le sol de la scène suivant une droite, c'est un point de cette droite, le point déterminé par la projection orthogonale de l'œil, et qu'on appelle, en perspective, le *point de vue*, qu'il prend pour point de concours de toutes les horizontales perpendiculaires au tableau; de sorte que les faces latérales de la scène concourent virtuellement en ce point, de même que toutes les lignes qu'on peut tracer sur ces faces pour représenter des horizontales, telles que les lignes architecturales des édifices. Ce point a reçu, plus tard, le nom de *point de contraction*, et plusieurs auteurs, se conformant aux principes de Serlio et de Guido Ubaldi, ont reconnu son importance et en ont fait l'usage convenable.

M. Poudra fait voir l'analogie de ce procédé pratique introduit par Guido Ubaldi, avec la théorie des figures homologiques; car le sol de la scène incliné en montant vers le fond, comme nous l'avons dit, correspond, en perspective-relief, au sol horizontal de la nature que l'on veut représenter, et le plan vertical parallèle au fond de la scène mené par le *point de contraction*, est le plan de fuite qui représente l'infini de la nature. Cette remarque suffit pour montrer que la construction des décorations théâtrales rentre dans la théorie des figures homologiques, et est susceptible, dès lors, de règles simples et rigoureuses.

Cette théorie donnera notamment la solution d'une question fondamentale qui présente toujours des difficultés aux décorateurs. Cette question est celle-ci : Étant donné un sujet d'une profondeur connue, ainsi que la profondeur de la scène théâtrale qui doit contenir sa représentation, et la position de l'œil, déterminer le point de contraction, ou, ce qui revient au même, la position du plan de fuite, sur lequel se trouve ce point, et dont se déduira la construction de toutes les autres parties de la scène?

Il faut observer que, dans cette question, l'inclinaison de la scène n'est pas donnée à priori, et qu'elle dépend de la hauteur de l'œil. Or, généralement, cette inclinaison est invariable dans un même théâtre; il en résulte, en conséquence, qu'avec les données que nous venons de supposer, savoir, la profondeur du sujet dans la nature et celle de la scène, la hauteur de l'œil n'est plus arbitraire. Or, comme dans les décorations théâtrales on a coutume de supposer l'œil du spectateur dans une certaine position constante au milieu du pourtour des premières loges, c'est sans doute cette condition surabondante qui donne lieu, dans la pratique, aux difficultés que rencontrent les décorateurs, peut-être sans qu'ils en voient bien la cause réelle qu'indique ici naturellement la théorie.

Nous avons dit ci-dessus que ce plan de fuite qui, dans la construction des bas-reliefs, peut être très-peu éloigné du fond apparent, s'en trouve, au contraire, très-éloigné dans les décorations théâtrales. Cela provient, comme l'observe M. Poudra, de ce que la dégradation des distances en profondeur doit être peu sensible, parce que les acteurs, qui eux-mêmes doivent faire partie de la scène, et cependant s'y mouvoir, ne sont pas susceptibles de la dégradation perspective que comporterait leur éloignement en profondeur.

Conclusions.

Nous arrivons enfin au terme du long examen qu'ont nécessité les différentes parties de l'ouvrage soumis à notre jugement. Sans avoir la pensée de prescrire aux artistes l'usage exclusif des règles rigoureuses, fondées sur la théorie géométrique développée par M. Poudra, nous exprimerons néanmoins la conviction que, dans tous les travaux d'art où l'on se propose l'imitation, par des effets d'apparence et d'illusion, on pourra toujours consulter avec fruit cet ouvrage, où se trouvent, à côté de ces règles aussi sûres et aussi précises que celles de la perspective plane, dont la peinture fait un si heureux emploi, des observations judicieuses et des appréciations motivées qu'on chercherait peut-être en vain dans d'autres écrits composés au seul point de vue artistique.

Nous pensons, en conséquence, que l'auteur mérite les encouragements de l'Académie.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré [*];

Par M. CHASLES.

I. — La construction géométrique des racines des équations du troisième et du quatrième degré donnée par Descartes dans sa *Géométrie* forme une des théories les plus importantes, à plusieurs titres, de cet admirable ouvrage; car elle implique la féconde Méthode des coefficients indéterminés, et les belles découvertes de l'auteur sur la composition des équations algébriques s'y rattachent aussi. Depuis, beaucoup de géomètres, Sluze, Newton, Halley, le marquis de Lhopital, etc., se sont occupés de la question, et ont développé toutes les conséquences qu'embrassait dans sa généralité le procédé de Descartes. Il semblerait donc aujourd'hui que tout a été dit sur ce point de théorie mathématique, et qu'il ne laisse plus rien à désirer. Cependant une simple remarque suffit pour montrer que la question se prête à un point de vue sous lequel on ne l'a point encore considérée. Car s'il est vrai que l'on effectue la résolution des équations *par une construction géométrique*, néanmoins la voie qui conduit si aisément à cette solution n'appartient pas aux méthodes de la simple et pure Géométrie : c'est une application de la *Géométrie analytique*, qui tient plus du calcul encore que de la Géométrie, puisqu'on y représente les courbes par des équations que l'on combine algébriquement. La question se présente donc intacte en Géométrie rationnelle, et constitue un sujet de recherches qui a sa place naturelle dans le développement et les applications des méthodes propres à cette partie des mathématiques. Car la Géométrie doit s'efforcer de s'affranchir de la nécessité de recourir aux méthodes de calcul pour résoudre les questions de son domaine, même quand elles se traduisent par une équation du troisième ou du quatrième degré [**].

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, p. 677.

[**] Il est à propos de rappeler ici que les Arabes ont construit d'une manière générale les racines de l'équation du troisième degré : mais il faut dire que leur méthode ne diffère pas, au fond, de celle de Descartes relative au cas du troisième degré, parce que les propriétés des coniques dont ils faisaient usage ne sont autres que des cas particuliers de la proposition du rapport constant du rectangle des ordonnées au rectangle des ab-

C'est sous ce point de vue que j'ai l'honneur d'entretenir l'Académie d'une question qui, au premier abord, aurait pu paraître épuisée et peu susceptible de faire ici le sujet d'une communication.

Du reste, les solutions auxquelles je suis parvenu reposent sur des considérations de Géométrie nouvelles qui peuvent mériter par elles-mêmes d'être connues, parce qu'elles s'appliquent à d'autres questions importantes. Il s'agit de quelques propriétés de deux séries de segments en involution, entre lesquels on établit une certaine relation fondée sur le rapport anharmonique.

On pense bien, sans qu'il soit besoin de le dire, que les sections coniques jouent un rôle nécessaire dans nos nouvelles constructions, comme dans celles de la Géométrie analytique. Employer d'autres courbes d'un ordre supérieur, serait une faute de méthode, d'autant plus grave, qu'on peut dire que la destination philosophique et essentielle des sections coniques, en Géométrie, est précisément la résolution des questions qui admettent trois ou quatre solutions, de même que la propriété essentielle du cercle est de servir à résoudre celles qui en admettent deux seulement.

Cette considération suffit pour montrer que ces courbes, indépendamment de leurs applications dans toutes les sciences qui ressortent des mathématiques, forment, au même titre que le cercle lui-même, une des bases fondamentales de la Géométrie, sans laquelle cette science rencontrerait à chaque pas des limites infranchissables, quand, au contraire, le progrès illimité forme son caractère propre et son attribut distinctif dans l'ensemble des connaissances humaines. Aussi ne saurait-on trop étudier et étendre la théorie des coniques, qui est encore beaucoup trop restreinte pour les besoins de la Géométrie.

Mais revenons au sujet de la présente communication. Je donne deux

scisses, qui forme l'équation des courbes dans la Géométrie analytique. Aussi, c'est la résolution des équations du quatrième degré, où tous les efforts des Arabes ont échoué, qui présentait des difficultés et qui fait le mérite de la methode de Descartes. Néanmoins le travail des géomètres arabes marquait un pas notable en Géométrie et en Algèbre, et était un acheminement vers une alliance plus intime entre ces deux branches des mathématiques. On doit, comme on sait, la connaissance de ce point historique important à M. Sédillot, qui l'a fait connaître par une analyse étendue d'un Manuscrit arabe de la Bibliothèque impériale (voir *Notices et Extraits des Mss.*, etc., tome XIII). Depuis, M. Woepcke, ayant trouvé dans un Ms. de la Bibliothèque de Leyde le même Traité arabe, mais plus complet que dans le Ms. de Paris, en a publié le texte et une traduction, suivis d'extraits d'autres Mss. inédits, sous le titre : L'*Algèbre d'Omar Alkhayyami*, etc.; Paris, 1851, grand in-8°.

constructions différentes de la question que je me suis proposée. Dans la première, on se sert des points d'intersection de deux coniques dont une est prise arbitrairement, et dans la seconde, des tangentes communes à deux pareilles courbes, dont une est prise aussi arbitrairement. Les deux constructions reposent sur quelques propositions fort simples que je vais d'abord exposer. Ces propositions, comme je l'ai dit ci-dessus, sont susceptibles d'application à d'autres questions, notamment dans la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre.

II. — *Propositions d'où dérive la construction des équations des racines du troisième et du quatrième degré.*

1er Théorème. — *Quand quatre segments* Mm, M'm',..., *pris sur une même droite, sont en involution, les pôles d'un point de la droite relatifs à ces segments ont leur rapport anharmonique constant, quel que soit ce point* [*].

Nous appellerons ce rapport constant *rapport anharmonique des quatre segments.*

2e Théorème. — *Si d'un point fixe pris sur une conique on mène des droites aux extrémités de chacun des quatre segments* Mm, M'm',..., *les quatre cordes que ces droites interceptent dans la conique, lesquelles, comme on sait, passent par un même point, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre segments.*

3e Théorème. — *Si dans l'équation du troisième degré à deux variables*

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0$$

les variables représentent des segments comptés sur une droite indéfinie OX *à partir d'une origine fixe* O, *de manière qu'une valeur de* z *détermine un point* n, *et les deux valeurs correspondantes de* x *deux points* M, m, *formant un segment* Mm : 1° *tous les segments* Mm *sont en involution ;* 2° *les points* n *correspondent anharmoniquement à ces segments (c'est-à-dire que le rapport anharmonique de quatre points* n *est égal à celui des quatre segments* Mm).

4e Théorème. — *Si dans l'équation du quatrième degré à deux variables*

$$x^2(az^2+bz+c)+x(a'z^2+b'z+c')+(a''z^2+b''z+c'')=0$$

le déterminant des neufs coefficients est nul, ce qu'on exprime par la relation

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0,$$

[*] Le *pôle* d'un point relatif à un segment est le conjugué harmonique du point par rapport aux deux extrémités du segment.

les racines conjuguées de l'équation sont doubles, c'est-à-dire que les deux valeurs de x *qui correspondent à une valeur donnée de* z, *correspondent aussi, toutes les deux à la fois, à une autre valeur de* z;

Et si ces couples de racines conjuguées représentent des segments Mm *et* Nn *sur une même droite, ces segments jouissent des deux propriétés suivantes :*

1°. *Les segments* Mm *sont en involution; et pareillement les segments* Nn;

2°. *Ceux-ci correspondent anharmoniquement aux premiers, c'est-à-dire que le rapport anharmonique de quatre segments* Nn *est égal à celui des quatre segments* Mm.

D'après ce théorème, trois systèmes de deux segments Mm, Nn suffisent pour déterminer tous les autres; et, conséquemment, trois systèmes de couples de racines conjuguées de l'équation suffisent pour déterminer tous les autres systèmes.

III. — *Construction des racines de l'équation du troisième degré*

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Qu'on prenne l'équation à deux variables

$$(Az + B)x^2 + Cz + D = 0,$$

qui devient la proposée quand on y fait $z = x$. Une infinité de systèmes de racines conjuguées x, z, satisfont à cette équation, et il s'agit de trouver les trois systèmes dans lesquels les deux variables sont égales. Or, pour cela, trois systèmes quelconques suffisent.

A cet effet, on prend une conique arbitrairement, et sur cette courbe un point fixe; et au moyen des trois systèmes de valeurs des deux variables, on construit quatre points qui avec le point fixe déterminent une autre conique. Cette courbe rencontre la première en trois points, autres que le point fixe, lesquels correspondent aux systèmes de valeurs égales de x et de z, et font connaître les racines de l'équation proposée.

Il nous reste à dire comment les systèmes de valeurs conjuguées des deux variables servent à construire les points de la seconde conique.

On prend sur une droite indéfinie OX, à partir d'un point fixe O, des segments égaux aux valeurs des deux variables. Ainsi, donnant à z une valeur arbitraire z', à laquelle correspondent deux valeurs de x (égales et de signes contraires), on prend un segment On égal à z', et deux segments OM, Om égaux aux deux valeurs correspondantes de x.

Un autre système de valeurs des deux variables détermine un autre point n' et un segment correspondant $M'm'$; et un troisième système, un troisième point n'' et un segment $M''m''$.

Ayant pris une section conique quelconque et un point P sur cette courbe, on mène par ce point trois droites aboutissant, l'une au point n, et les deux autres aux extrémités du segment Mm; ces deux dernières interceptent dans la conique une corde Aa qui rencontre la première droite Pn en un point α. Le second point n' et le segment correspondant $M'm'$ donnent une deuxième corde $A'a'$ et un nouveau point α'. Et enfin au troisième point n'' et au segment $M''m''$ correspondent semblablement une corde $A''a''$ et un troisième point α''. Les trois cordes concourent en un même point (parce que les trois segments Mm, $M'm'$, $M''m''$ sont en involution, théorèmes 3e et 2e). Ce point avec les trois α, α', α'' et le point P détermine une conique sur laquelle serait un quatrième point α'' construit au moyen d'un quatrième système de valeurs des variables x et z (parce que les points n, n',... correspondent anharmoniquement aux segments Nn, $N'n'$, théorème 3e, et par suite aux cordes Aa, $A'a'$, théorème 2e). Il s'ensuit évidemment que la droite menée du point P à chacun des trois points d'intersection des deux coniques détermine sur la droite OX un point n qui coïncide avec une des extrémités du segment correspondant Mm; de sorte que pour ce point la variable x est égale à z, et par conséquent le segment Om est une racine de l'équation.

Ainsi les droites menées du point fixe P aux trois autres points d'intersection des deux coniques déterminent les trois racines de l'équation proposée.

Observation. — On peut former autrement, mais non indifféremment, l'équation à deux variables qui devient la proposée quand les variables sont égales. Il suffit et il est nécessaire qu'une des variables n'entre qu'à la première puissance dans l'équation.

On peut encore résoudre l'équation du troisième degré à la manière des équations du quatrième degré, comme nous le dirons après avoir donné la construction propre à celles-ci.

IV. — *Construction des racines de l'équation du quatrième degré*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$$

Qu'on prenne l'équation à deux variables

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

qui devient la proposée quand on y fait $z = x$.

Donnant à x une valeur arbitraire x', on aura pour z deux valeurs z', z'' (égales et de signes contraires), et à ces deux valeurs correspondra une même seconde valeur x'' de x. On a donc un système de deux couples de racines conjuguées. On peut former ainsi une infinité de tels systèmes; et trois suffisent pour déterminer tous les autres.

Que l'on porte sur une droite indéfinie OX, à partir du point fixe O, les diverses valeurs des variables x et z. Les valeurs x', x'' déterminent deux points M, m, et les valeurs correspondantes z' et z'', deux points N, n : ces points donnent lieu aux deux segments Mm, Nn. Pour un autre système de deux couples de racines conjuguées de l'équation, on a deux autres segments correspondants M$'m'$, N$'n'$.

Trois couples de segments suffisent pour déterminer tous les autres (théorème 4^e), et par conséquent tous les couples de racines conjuguées x', x'' et z', z''. Mais, en outre, ils suffisent pour déterminer, au moyen d'une construction géométrique, les quatre couples dans chacun desquels les deux segments ont une extrémité commune, auquel cas les deux variables x et z sont égales et constituent une racine de l'équation du quatrième degré.

Construction. — Qu'on prenne une conique quelconque, et sur cette courbe un point fixe P. Que par ce point on mène des droites aux quatre points M, m, N, n. Les deux premières interceptent dans la conique une corde Aa, et les deux autres une corde Bb. Un autre couple de segments M$'m'$, N$'n'$ donnera semblablement deux autres cordes A$'a'$, B$'b'$; et un troisième couple M$''m''$, N$''n''$, deux nouvelles cordes A$''a''$, B$''b''$. Les trois cordes Aa, A$'a'$, A$''a''$ passent par un même point Q (parce que les trois segments Mm, ... sont en involution), et les trois Bb, B$'b'$, B$''b''$ par un autre point Q$'$. D'une autre part, les trois premières rencontrent respectivement les trois autres en trois points α, α', α''. Ces trois points avec les deux Q, Q$'$ déterminent une conique; et cette courbe rencontre la premiere en quatre points. Les droites menées du point P à ces points déterminent sur la droite OX quatre segments qui sont les racines de l'équation.

Observation. — On peut former de bien des manières différentes l'équation à deux variables, puisqu'il suffit, d'après le théorème 4^e, que les coefficients satisfassent à une condition unique fort simple. Ainsi, on pourra prendre les équations

$$z^2(x^2 + Ax + B) + Cx + D = 0,$$
$$z^2(x^2 + Ax + B) + Cz + D = 0,$$
$$(x^2 + Ax)z^2 + Bxz + \frac{C - \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}x + \frac{C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}z + D = 0;$$

mais non celles-ci :

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bxz + Cx + D = 0,$$
$$(x^2 + B)z^2 + Ax^2z + Cx + D = 0.$$

Application aux équations du troisième degré. — La construction précédente s'applique aux équations du troisième degré de deux manières, qui diffèrent de la méthode directe propre à ces équations.

Première manière. — On suppose le dernier terme D nul, et l'on effectue la construction relative à l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0,$$

au moyen, par exemple, de l'équation

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx = 0.$$

Alors les trois segments Mm ont leur origine commune au point O, et le point de concours des trois cordes Aa est situé sur la conique prise arbitrairement. La conique que l'on construit passe par ce point, auquel correspond sur l'axe OX une racine nulle; et les trois autres points d'intersection des deux coniques donnent les trois racines de l'équation du troisième degré.

Deuxième manière. — On peut opérer directement sur l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

de la même manière que sur l'équation générale du quatrième degré.

On prendra une équation à deux variables, telle que

$$x^2(z + \lambda) + (A - \lambda)z^2 + Bz + C = 0,$$

ou, plus généralement,

$$x^2(bz + c) + x(a'z^2 + b'z + c') + a''z^2 + b''z + c''z = 0,$$

pourvu que ses coefficients satisfassent à la relation

$$a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c) = 0,$$

et, en outre, à la condition que l'équation devienne la proposée quand on y fait $z = x$.

C'est cette équation dont on déterminera trois couples de racines conjuguées qui, au moyen d'une conique prise arbitrairement, serviront à en construire une autre dont les points d'intersection avec la première donneront les racines cherchées.

Ici peut se présenter une objection, car les deux coniques se couperont en quatre points qui sembleraient donner quatre racines au lieu de trois. Mais un de ces points est connu à priori; il répond au système de valeurs $x = \infty$ et $z = \infty$ qui, effectivement, satisfont à l'équation à deux variables, mais introduisent une racine étrangère à l'équation du troisième degré.

V. — *Autre mode de construction des équations du troisième et du quatrième degré.*

Équations du troisième degré. — Après avoir déterminé sur une droite indéfinie OX les trois points n, n', n'' et les segments correspondants $\mathrm{M}m$, $\mathrm{M}'m'$, $\mathrm{M}''m''$, comme dans la première solution, on prend arbitrairement une section conique tangente à la droite OX en un quelconque de ses points. Par les deux points M, m on mène deux tangentes à cette courbe, lesquelles se rencontrent en un point α. Les deux points M', m' donnent lieu semblablement à un point α', et les deux M'', m'' à un point α''. Ces trois points sont sur une même droite L. On joint ces points respectivement aux points n, n', n'' par trois droites, qui avec la droite L et la droite OX déterminent une conique qui leur est tangente. Cette conique et celle qu'on a prise à volonté ont trois tangentes communes, autres que la droite OX. Les points où ces tangentes rencontrent cette droite déterminent les racines de l'équation, c'est-à-dire que ces racines sont les distances de ces points à l'origine O.

Équations du quatrième degré. — Après avoir déterminé les segments $\mathrm{M}m$, $\mathrm{N}n$, comme dans la première construction, on prend une conique tangente à la droite OX, et l'on mène par les extrémités des deux segments les tangentes à cette courbe. Les deux tangentes émanées des points M et m se rencontrent en un point α, et les deux autres en un point 6. Un second couple de segments donne semblablement deux points α', $6'$, et un troisième couple deux points α'', $6''$. Les trois points α, α', α'' sont sur une même droite L, et les trois 6, $6'$, $6''$ sur une droite L'. Ces deux droites et les trois $\alpha 6$, $\alpha' 6'$, $\alpha'' 6''$ déterminent une conique qui leur est tangente. Les quatre tangentes communes à cette courbe et à la première rencontrent la droite OX en quatre points dont les distances au point O sont les racines cherchées.

Cette construction s'applique, comme la première, aux équations du troisième degré, de deux manières.

SUR DIVERS POINTS

DE LA

THÉORIE DES INVARIANTS,

PAR M. EDOUARD COMBESCURE.

I.

On me permettra de rappeler que l'on nomme *invariant* toute fonction φ des coefficients $a, b, c,\ldots$ d'une ou de plusieurs fonctions homogènes données, qui jouit de la propriété caractéristique de rester identiquement la même en $a, b, c,\ldots$, lorsque, après avoir soumis les fonctions considérées à une substitution unimodulaire [*], on remplace les coefficients dont il s'agit par les expressions nouvelles que la substitution leur a fait acquérir.

De cette définition découle immédiatement, comme l'a fait voir M. Sylvester (*On the Calculus of Forms*, sect. IV) [**], l'existence de certaines équations différentielles que doivent vérifier les invariants. Je vais établir ces équations par un procédé qui me semble plus simple que celui de l'habile analyste, à qui j'emprunterai seulement l'emploi

[*] Si dans une fonction de trois variables, x, y, z par exemple, on remplace

$$\begin{array}{ll} x & \text{par} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y & \text{par} \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z & \text{par} \quad \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{array}$$

le déterminant $\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \ldots$ est appelé, comme on sait, le *module de la substitution*, laquelle devient *unimodulaire* quand ce déterminant est égal à *un*.

[**] *Cambridge and Dublin mathematical Journal;* 1852.

des substitutions partielles successives en lieu et place d'une substitution immédiate tout à fait générale. Je prendrai dès l'abord le cas d'une fonction homogène d'un nombre quelconque p de variables x, y, z,.... u. Une pareille fonction est généralement représentée par

$$\sum \frac{\Pi(n)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(\mu)\ldots\Pi(\rho)}\, a_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}\, x^\lambda y^\mu \ldots u^\rho;$$

$\Pi(\lambda)$ désigne, à l'ordinaire, le produit continuel $1.2.3\ldots\lambda$; les $a_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}$ sont ce qu'on est convenu d'appeler les *coefficients*, et le $\sum$ se rapporte à toutes les solutions, en nombres entiers nuls ou positifs, de l'équation

$$\lambda + \mu + \ldots + \rho = n,$$

n étant le degré de la fonction.

Si l'on remplace, dans cette fonction, y par $y + \varepsilon x$, toutes les autres variables restant intactes, il est facile de voir que le coefficient $a'_{\lambda,\mu,\ldots,\rho}$ qui répond à $x^\lambda y^\mu \ldots u^\rho$, après la substitution, sera donné par la relation

$$a'_{\lambda\ldots\rho} = a_{\lambda\ldots\rho} + \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} a_{\lambda-2,\mu+2,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^2 + \ldots \\ + a_{0,\mu+\lambda,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^\lambda,$$

d'où résulte

$$\frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = \lambda \left\{ \begin{array}{r} a_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho} + (\lambda-1)\, a_{\lambda-2,\mu+2,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon + \ldots \\ + a_{0,\mu+1+\lambda-1,\nu\ldots\rho}\,\varepsilon^{\lambda-1} \end{array} \right\},$$

c'est-à-dire

$$\frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = \lambda\, a'_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots\rho}.$$

Actuellement, si l'on demande qu'une fonction φ des coefficients $a_{\lambda\ldots\rho}$ persévère dans sa composition primitive lorsqu'on vient à remplacer ces quantités par les expressions précédentes des $a'_{\lambda\ldots\rho}$, il sera nécessaire que ε disparaisse du résultat de cette substitution; et il est clair que ε ne pourra disparaître sans entraîner la disparition des quantités qui multiplient ses diverses puissances dans les expressions mentionnées des $a'_{\lambda\ldots\rho}$. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction φ des $a'_{\lambda\ldots\rho}$ se réduise à la même fonction des $a_{\lambda\ldots\rho}$, sera

$$\sum \frac{d\varphi}{da'_{\lambda\ldots\rho}} \frac{da'_{\lambda\ldots\rho}}{d\varepsilon} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \lambda a'_{\lambda-1,\mu+1,\ldots\rho} \frac{d\varphi}{da'_{\lambda\ldots\rho}} = 0;$$

et comme les $a'_{\lambda\ldots\rho}$ désignent des quantités tout à fait quelconques qui peuvent parfaitement remplacer les $a_{\lambda\ldots\rho}$, rien ne s'oppose à ce qu'on supprime les accents et qu'on écrive en conséquence

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\ldots\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0.$$

Au reste, cette suppression d'accents revient à effectuer un changement de variables au moyen de la relation qui lie les a' aux a et donne réciproquement les a par les a' moyennant la substitution de $-\varepsilon$ à ε.

L'adjonction successive de y à chacune des autres variables $z, \ldots, u$ donnerait lieu, comme pour x, à autant d'équations analogues, et l'on obtiendrait d'autres pareilles équations en partant de chacune de ces mêmes variables comme on est parti de y. M. Sylvester, dont la méthode laisse échapper, ce me semble, le type général des équations différentielles dont il s'agit, avertit qu'il suffit de prendre un nombre p de ces équations égal au nombre des variables $x, y, \ldots, u$, et que le choix n'est pas arbitraire. Mais n'ayant rien spécifié relativement à ce choix, il ne sera peut-être pas inutile de réparer son oubli. Or si l'on altère successivement, dans $a_{\lambda\ldots\rho}$, deux indices contigus depuis le premier λ, par exemple, jusqu'au dernier ρ, pour retomber brusquement sur le point de départ, les substitutions partielles correspondantes atteignant de proche en proche toutes les variables et la supposition répétée d'une pareille opération aboutissant à une substitution unimodulaire tout à fait générale, les p équations qui répondront à cette altération circulaire des indices seront évidemment suffisantes et ne se trouveront pas en excès. On aura donc en prenant quatre variables, pour fixer les idées,

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu,\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \mu a_{\lambda,\mu-1,\nu+1,\rho} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \nu a_{\lambda,\mu,\nu-1,\rho+1} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \rho a_{\lambda+1,\mu,\nu,\rho-1} \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

le $\sum$ conservant toujours la signification qu'il a dans la fonction donnée.

Si la fonction φ devait être composée avec les coefficients de plusieurs fonctions, d'un même nombre de variables, on introduirait dans chacune des équations différentielles autant de nouveaux $\sum$ qu'il y a de fonctions nouvelles. Le cas d'un nombre inégal de variables donne nécessairement lieu à des conventions diverses qu'il n'importe pas d'énumérer, et qui n'offrent pas d'embarras pour le choix des équations.

Dans le cas des substitutions orthogonales dont, à ma connaissance, les auteurs ne se sont pas spécialement occupés au point de vue des invariants, on trouve, par une analyse semblable à la précédente, que les équations ci-dessus, doivent être remplacées par les suivantes :

$$\sum \left(\lambda a_{\lambda-1,\mu+1,\nu,\rho} - \mu a_{\lambda+1,\mu-1,\nu,\rho}\right) \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

$$\sum \left(\mu a_{\lambda,\mu-1,\nu+1,\rho} - \nu a_{\lambda,\mu+1,\nu-1,\rho}\right) \frac{d\varphi}{da_{\lambda\ldots\rho}} = 0,$$

. . . .

équations dont le nombre est égal à celui des variables, excepté pour le cas de deux variables où ce nombre se réduit à *un*, et qui sont en quelque sorte aux premières ce que sont, dans la statique, les équations des moments ou de rotation à celles de translation.

II.

Je vais, dans ce qui suit, m'occuper exclusivement de la fonction à deux indéterminées, savoir

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots \\ + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n. \end{aligned}\right.$$

On a ici les deux équations différentielles

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} i a_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i} = 0, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} i a_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i+1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui ont séparément pour intégrale, la première une fonction arbitraire des quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la seconde une fonction arbitraire des quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, renfermées dans le tableau suivant :

$$\left(\eta = -\frac{a_1}{a_0}\right) \left\{\begin{aligned} &\alpha_0 = a_0, \\ &\alpha_1 = a_1 + a_0 \eta, \\ &\alpha_2 = a_0 (a_2 + 2 a_1 \eta + a_0 \eta^2), \\ &\alpha_3 = a_0^2 (a_3 + 3 a_2 \eta + 3 a_1 \eta^2 + a_0 \eta^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_n = a_0^{n-1} (a_n + n a_{n-1} \eta + \ldots + n a_1 \eta^{n-1} + a_0 \eta^n), \end{aligned}\right.$$

$$\left(\varepsilon = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \left\{\begin{aligned} &\beta_0 = a_n, \\ &\beta_1 = a_{n-1} + a_n \varepsilon, \\ &\beta_2 = a_n (a_{n-2} + 2 a_{n-1} \varepsilon + a_n \varepsilon^2), \\ &\beta_3 = a_n^2 (a_{n-3} + 3 a_{n-2} \varepsilon + 3 a_{n-1} \varepsilon^2 + a_n \varepsilon^3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\beta_n = a_n^{n-1} (a_0 + n a_1 \varepsilon + \ldots + n a_{n-1} \varepsilon^{n-1} + a_n \varepsilon^n). \end{aligned}\right.$$

La seule conséquence vraiment utile qu'on ait, à ma connaissance, déduite jusqu'ici de l'une ou l'autre de ces intégrales, consiste dans une remarque de M. Brioschi, en vertu de laquelle la somme des produits des indices des lettres qui entrent dans α_i par les exposants correspondants, ayant pour chaque terme une valeur constante et égale à i, la même propriété s'étendra à l'intégrale supposée une fonction homogène des coefficients. Ainsi

$$\sum A\, a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

étant cette intégrale et μ désignant une constante, on aura

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n = \mu\ [^*].$$

Maintenant la seconde équation (2) se déduisant de la première par le changement de a_i en a_{n-i}, la vérification simultanée de ces deux équations exige que

$$(3) \qquad \varphi = \sum A \begin{pmatrix} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} \\ a_n^{\lambda_0} a_{n-1}^{\lambda_1} a_{n-2}^{\lambda_2} \ldots a_0^{\lambda_0} \end{pmatrix},$$

ainsi qu'on l'a remarqué depuis longtemps dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*. On devra donc avoir

$$n\lambda_0 + (n-1)\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = \mu,$$

et par suite, en faisant

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = p;$$

et ajoutant les deux expressions de μ, il viendra

$$\mu = \frac{np}{2},$$

ce qui fait connaître l'indice, et exige que np soit pair.

Avec le groupement nécessaire des termes ci-dessus indiqué, il est

---

[*] La constante μ a été appelée par M. Transon l'*indice de la fonction homogène* $\sum$: elle indique, comme on peut le voir aisément et comme M. Brioschi l'a, je crois, établi le premier, le degré de la fonction par rapport aux racines de l'équation

$$f(x, 1) = 0.$$

clair qu'il suffit d'employer l'une ou l'autre des équations différentielles (2) dans la recherche des coefficients A de la fonction intégrale.

En adoptant la première, j'ajouterai une remarque qui ne contribue pas peu, dans l'application, à l'abréviation du calcul. Elle consiste en ce que, pour savoir ce que la fonction (3) fournit à la substitution dans l'équation mentionnée, il suffit d'opérer une sorte de différentiation mixte, portant à la fois sur l'exposant et sur l'indice de chaque lettre. Ainsi la lettre isolée $a_i^{\lambda_i}$ donnerait

$$\delta . a_i^{\lambda_i} = i\lambda_i . a_i^{\lambda_i - 1} a_{i-1},$$

δ étant le symbole de cette différentiation. Cette regle, d'une facile traduction en langage ordinaire, dispense en particulier d'avoir l'équation différentielle constamment présente aux yeux ou à l'esprit. Comme on doit finalement écrire

$$\delta . \varphi = 0,$$

on exprime une certaine condition de *maximum* dont la nature intime m'échappe, mais qui doit être soumise à de certaines lois déterminées.

Pour faire une application, je rappellerai qu'on a l'invariant quadratique de M. Cayley ($n = 2n'$),

$$\mathrm{I}_2 = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i} a_i a_{n-i},$$

que fournit immédiatement l'emploi des coefficients indéterminés. Pour obtenir l'invariant cubique, comme $\mu = 3n'$, on écrira

$$\mathrm{I}_3 = a_{2n'} \sum_{i=0}^{i=n'} \mathrm{A}_i^{(0)} a_i a_{n'-i} + a_{2n'-1} \sum_i \mathrm{A}_i^{(1)} a_i a_{n'+1-i} + \ldots.$$

La différentiation par δ diminuant les indices, il faudra que le δ du premier $\sum$ donne un résultat identiquement nul, et comme on écrit alors les relations entre les $\mathrm{A}_i^{(0)}$ qui correspondent à l'invariant quadratique pour la fonction du $n'^{\text{ième}}$ degré, il faut que $n' = 2n''$, ce qui constitue en passant un des beaux résultats de M. Cayley. Différentiant ensuite le premier terme en *dehors* du $\sum$ et le second en *dedans* du $\sum$, on devra avoir

$$2n' \sum \mathrm{A}_i^{(0)} a_i a_{n'-i} = \sum \mathrm{A}_i^{(1)} \left(i a_{i-1} a_{n'+1-i} + \overline{n'+1-i}\,.\,a_i a_{n'-i} \right).$$

ce qui fera connaître une seconde série de coefficients. La continuation de ces différentiations alternatives par δ donnera d'autres séries, et ainsi de suite. L'application de ces remarques très-simples m'a permis de calculer certains invariants beaucoup plus rapidement que je ne l'avais fait dans le principe où je substituais directement dans l'équation différentielle sans suivre un procédé empreint d'une certaine régularité.

J'invoquerai tout à l'heure un théorème de M. Cayley, publié par M. Sylvester et qui consiste en ce que le degré, quant aux coefficients, d'une fonction symétrique des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'équation

$$f(x, 1) = 0$$

(où je supposerai, pour un moment, $a_0 = 1$), est précisément égal à la puissance la plus haute de l'une quelconque de ces racines dans la fonction symétrique considérée [*]. Ce théorème pouvant être utile dans d'autres circonstances, j'en donnerai la démonstration nouvelle suivante qui me paraît assez simple :

P_i désignant la somme des produits i à i des $n-1$ racines $x_2, x_3, \ldots, x_n$, on a, abstraction faite du signe et des facteurs binomiaux,

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_1 + \mathrm{P}_1,\\
a_2 &= x_1 \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= x_1 \mathrm{P}_{n-2} + \mathrm{P}_{n-1},\\
a_n &= x_1 \mathrm{P}_{n-1},
\end{aligned}$$

[*] *Philosophical Magazine*, mars 1853. Je crois que M. Sylvester a établi seulement que ce degré ne pouvait pas surpasser la plus haute puissance, etc.

d'où

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\dots a_n^{\lambda_n} = x_1^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} P_1^{\lambda_2} P_2^{\lambda_3}\dots P_{n-1}^{\lambda_n} + \dots.$$

Les puissances de x_1 allant en diminuant dans la partie non écrite, le degré du terme $a_1^{\lambda_1}\dots a_n^{\lambda_n}$ est précisément égal à la plus haute puissance de x_1 dans la fonction symétrique qui lui répond. D'ailleurs, dans un autre terme $a_1^{\lambda'_1}\dots a_n^{\lambda'_n}$ pour lequel on aurait

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \dots + \lambda'_n = \lambda_1 + \dots + \lambda_n,$$

les $\lambda'_2, \lambda'_3,\dots, \lambda'_n$ ne pouvant être égaux respectivement aux $\lambda_2, \lambda_3,\dots, \lambda_n$, sans quoi ce terme coïnciderait avec le premier, les produits

$$P_1^{\lambda_2}\dots P_{n-1}^{\lambda_n} \quad \text{et} \quad P_1^{\lambda'_2}\dots P_{n-1}^{\lambda'_n},$$

où l'on peut prendre $P_1, P_2,\dots, P_{n-1}$ pour variables tout à fait indépendantes, seront parfaitement dissemblables, et il ne pourra s'opérer aucune réduction dans les deux premiers termes des fonctions symétriques qui correspondent à $a_1^{\lambda_1}\dots a_n^{\lambda_n}$ et à $a_1^{\lambda'_1}\dots a_n^{\lambda'_n}$. Donc, dans un polynôme $\sum \mathrm{A} a_1^{\lambda_1}\dots a_n^{\lambda_n}$, le degré sera bien égal à la plus haute puissance de l'une quelconque des racines dans la fonction symétrique correspondante.

III.

M. Brioschi a eu le premier l'idée de faire dépendre immédiatement les invariants des racines $x_1, x_2,\dots, x_n$ [*]. Il fait usage, à cet effet, d'une formule de transformation qu'on peut déduire sur-le-champ des relations précédentes. Ces relations donnent effectivement, en remettant les facteurs binomiaux, et écrivant ensuite b_i pour $\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1.2\dots i} a_i$,

$$\frac{db_i}{dx_1} = \pm P_{i-1},$$

c'est-à-dire que $\frac{db_i}{dx_1}$ est égal au coefficient de x^i dans le quotient $\frac{f(x)}{x-x_1}$.

---

[*] *Annales de Math. et de Phys.* de M. Tortolini, juin 1854.

Ainsi

$$\frac{db_i}{dx_1} = -(b_{i-1} + b_{i-2}x_1 + b_{i-3}x_1^2 + \ldots + b_0 x_1^{i-1}).$$

De là, par les relations qui ont lieu entre les racines et les sommes de leurs puissances semblables, on déduit tout de suite, avec M. Brioschi,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} = -\left(a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_{n-1}\frac{d\varphi}{da_n}\right),$$

$$(\alpha)\ \left\{\begin{array}{l} x_1^2 \dfrac{d\varphi}{dx_1} + x_2^2 \dfrac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n^2 \dfrac{d\varphi}{dx_n} = S_1\left(a_1 \dfrac{d\varphi}{da_1} + \ldots + a_n \dfrac{d\varphi}{da_n}\right) \\ + (n-1)a_2 \dfrac{d\varphi}{da_1} + (n-2)a_3 \dfrac{d\varphi}{da_2} + (n-3)a_4 \dfrac{d\varphi}{da_3} + \ldots + a_n \dfrac{d\varphi}{da_{n-1}}, \end{array}\right.$$

où $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Puis, en supposant φ homogène et de degré p, par rapport aux coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et se reportant aux équations différentielles (2), on voit que leurs transformées sont

$$(b)\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi}{dx_1} + \dfrac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \dfrac{d\varphi}{dx_n} = 0, \\ x_1^2 \dfrac{d\varphi}{dx_1} + x_2^2 \dfrac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n^2 \dfrac{d\varphi}{dx_n} = p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\varphi. \end{array}\right.$$

Enfin, on trouve par la même formule de transformation

$$(\beta)\quad x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + x_n \frac{d\varphi}{dx_n} = a_1 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_2 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_n \frac{d\varphi}{da_n} \quad [*];$$

et, en s'appuyant sur cette équation

$$a_1 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_2 \frac{d\varphi}{da_2} + \ldots + na_n \frac{d\varphi}{da_n} = \frac{pn}{2}\varphi,$$

que M. Cayley a fait voir être une conséquence des équations (2), on en conclut

$$(c)\qquad x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + x_n \frac{d\varphi}{dx_n} = \frac{np}{2}\varphi;$$

tels sont les résultats obtenus par M. Brioschi. De l'inspection des

[*] Si l'on remplace a_i par $a_i'^i$, comme une fonction quelconque φ, dépendant successivement des variables x_i et a_i', est exactement de même degré par rapport à ces deux systèmes de variables, on obtient immédiatement, par ce seul fait, l'équation (β).

équations transformées, ce géomètre conclut sur-le-champ que toute fonction symétrique des racines qui est en même temps une fonction des différences des racines, dans chacun des termes de laquelle toutes les racines entrent un même nombre de fois, est un invariant de la fonction $f(x, y)$.

Il restait à faire voir que, réciproquement, tout invariant est réductible à une pareille fonction des différences.

J'étais arrivé à ce dernier résultat et aux précédents en faisant usage de l'analyse suivante, avant d'avoir eu connaissance du Mémoire de M. Brioschi.

La fonction (1) étant mise sous la forme

$$(a)\qquad f(x,y) = a(x - x_1 y)(x - x_2 y)\ldots(x - x_n y),$$

si l'on reprend la substitution

$$x = x - \varepsilon y, \quad y = y,$$

son unique effet est de changer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en

$$x'_1 = x_1 + \varepsilon, \quad x'_2 = x_2 + \varepsilon, \ldots, \quad x'_n = x_n + \varepsilon,$$

a restant le même. Il faut donc que l'on ait

$$\frac{d\varphi(x'_1, \ldots, x'_n)}{d\varepsilon} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dx'_1} + \frac{d\varphi}{dx'_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx'_n} = 0,$$

ou, en supprimant les accents,

$$\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Ensuite, la seconde substitution partielle

$$x = x, \quad y = y - \varepsilon x,$$

transforme f dans

$$\mathrm{f} = a(1 + \varepsilon x_1)\ldots(1 + \varepsilon x_n)\left(x - \frac{x_1}{1 + \varepsilon x_1} y\right)\cdots\left(x - \frac{x_n}{1 + \varepsilon x_n} y\right),$$

et n'a conséquemment d'autre effet que de changer a, x_1, x_2,..., x_n respectivement en

$$a' = a(1+\varepsilon x_1)\ldots(1+\varepsilon x_n);\quad x'_1 = \frac{x_1}{1+\varepsilon x_1},\ldots,\quad x'_n = \frac{x_n}{1+\varepsilon x_n}.$$

Il faut donc aussi que l'on ait

$$\frac{d\varphi}{da'}\frac{da'}{d\varepsilon} + \frac{d\varphi}{dx'_1}\frac{dx'_1}{d\varepsilon} + \ldots = 0.$$

Mais

$$\frac{da'}{d\varepsilon} = a'(x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n),\qquad \frac{dx'_1}{d\varepsilon} = -x'^2_1,\ldots;$$

par conséquent, en substituant et supprimant les accents (ce qui correspond toujours à un changement de variables, si l'on veut), on aura

$$(b')\qquad x_1^2\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + x_n^2\frac{d\varphi}{dx_n} = a(x_1 + \ldots + x_n)\frac{d\varphi}{da}.$$

Lorsqu'on suppose φ une fonction homogène des coefficients de f, les racines x_1, x_2,..., x_n dépendant uniquement des rapports arbitraires $\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a},\ldots,\frac{a_n}{a}$; $\frac{d\varphi}{da}$ représente la dérivée partielle de la fonction considérée en tant que a n'entre point dans ces rapports, et il importe de ne pas la confondre avec $\frac{d\varphi}{da_0}$. On a donc dans ce cas

$$a\frac{d\varphi}{da} = p\varphi,$$

p étant toujours le degré de φ par rapport aux coefficients. L'équation précédente devient alors la seconde (b).

La première équation (b) faisant dépendre φ arbitrairement des différences

$$x_2 - x_1 = u_1,\quad x_3 - x_1 = u_2,\ldots,\quad x_n - x_1 = u_{n-1};$$

en introduisant ces $(n-1)$ variables dans la seconde, il viendra

$$u_1(u_1 + 2x_1)\frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}(u_{n-1} + 2x_1)\frac{d\varphi}{du_{n-1}}$$
$$= p(u_1 + \ldots + u_{n-1} + nx_1)\varphi;$$

et comme φ ne peut dépendre que de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, et que x_1 reste conséquemment tout à fait arbitraire, cette équation se partage dans les deux suivantes :

$$u_1^2 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}^2 \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = p(u_1 + \ldots + u_{n-1})\varphi,$$

$$u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = \frac{np}{2}\varphi.$$

La dernière, à cause de

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi}{dx_1} = -\dfrac{d\varphi}{du_1} - \dfrac{d\varphi}{du_2} - \ldots - \dfrac{d\varphi}{du_{n-1}}, \\ \dfrac{d\varphi}{dx_2} = \dfrac{d\varphi}{du_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\varphi}{dx_n} = \dfrac{d\varphi}{du_{n-1}}, \end{array} \right.$$

redonne l'équation (c) [*].

Maintenant je considère la première équation (b) et l'équation (b'), qui sont tout à fait générales et ne préjugent rien sur l'homogénéité de φ. J'introduis encore dans (b') les variables $u_1, \ldots, u_{n-1}$, et, à cause que x_1 reste toujours arbitraire, j'obtiens les deux équations

$$u_1^2 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1}^2 \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = (u_1 + \ldots + u_{n-1})\, a \frac{d\varphi}{da},$$

$$u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + \ldots + u_{n-1} \frac{d\varphi}{du_{n-1}} = \frac{n}{2} a \frac{d\varphi}{da} \quad [**].$$

---

[*] De ce que φ est une fonction symétrique des racines $x_1, \ldots, x_n$, homogène par rapport à ces racines, on peut conclure tout de suite la constance de l'*indice* μ dont il a été question au § II. Il suffit de remarquer que $\frac{a_i}{a}$ étant du degré i, quant aux racines, $\left(\frac{a_i}{a}\right)^{\lambda_i}$ sera de degré $i\lambda_i$, et conséquemment $\sum A a^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ du degré constant $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n$.

[**] Dans le cas très-particulier de $n = 2$, ce partage n'est plus nécessaire à cause du facteur $x_1 + x_2$ qui apparaît dans les deux membres.

La seconde oblige φ à dépendre arbitrairement de

$$z_1 = a^{\frac{2}{n}} u_1, \ldots, \quad z_{n-1} = a^{\frac{2}{n}} u_{n-1},$$

et dès lors, en introduisant les z_i dans la première, et faisant, pour abréger,

$$\theta = z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1},$$

il vient

$$(d) \qquad z_1 \left(z_1 - \frac{2}{n}\theta\right)\frac{d\varphi}{dz_1} + \ldots + z_{n-1}\left(z_{n-1} - \frac{2}{n}\theta\right)\frac{d\varphi}{dz_{n-1}} = 0.$$

Le second membre de cette équation étant nul, il suffit de trouver $n-2$ fonctions particulières qui la vérifient : ce qu'on obtient tout de suite en prenant les divers produits des différences symétriques

$$\varpi_1 = a^2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\ldots(x_n - x_1),$$
$$\varpi_2 = a^2 (x_2 - x_1)(x_1 - x_3)\ldots(x_n - x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces quantités, parce qu'elles vérifient l'équation (d), sont finalement réductibles à $n-2$ variables indépendantes, et pas à un moindre nombre; car en conservant ϖ_1, par exemple, on en déduit, par la division, des expressions de la forme

$$y_i = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_i - x_1}{x_i - x_2},$$

et l'on voit bien qu'en attribuant pour un moment, à x_1, x_2, x_3, des valeurs fixes quelconques, et donnant à i les valeurs $4, 5, \ldots, n$, on pourra déduire de ces expressions des valeurs arbitraires des $\frac{x_i - x_1}{x_i - x_2}$ répondant à des valeurs aussi arbitraires des y_i. On aura donc, en y comprenant ϖ_1, $n-2$ fonctions intégrantes parfaitement indépendantes.

Les $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$, qu'on peut considérer comme les vrais éléments qui doivent concourir à la formation des invariants, renfermant individuellement toutes les racines et chacune un même nombre de fois, de quelque manière qu'on les combine à l'effet de former des fonctions entières et homogenes des racines, ce double caractere se transmettra intégralement aux fonctions résultantes. Cela découle de la parfaite indépendance de $n-2$ de ces quantités. Et si l'on admettait même la disparition possible de certains termes, qui tendrait à détruire cette double propriété, rien n'empècherait de les réintroduire comme des forces capables de se neutraliser. Il est inutile de dire que, dans la combinaison des fonctions élémentaires dont il s'agit, on ne doit pas toujours exclure la *division*. On peut donc établir ce théorème, qui n'est pas, ce me semble, sans importance dans la présente théorie :

Pour qu'une fonction symétrique des racines représente un invariant, il faut et il suffit qu'elle soit réductible à une fonction homogène des différences des racines dans les divers termes de laquelle toutes les racines apparaissent, sans exception, et chacune un même nombre de fois.

Ce nombre commun de fois indique précisément, d'apres le theorème de M. Cayley, le degré de l'invariant par rapport aux coefficients. On voit à quel problème de partition des nombres on se trouve par là ramené. On en traduit les conditions primordiales par l'emploi des exposants indéterminés. Ainsi $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{n-1}$ étant les exposants qui répondent à $x_1-x_2,\ldots, x_1-x_n$; $\beta_1,\ldots, \beta_{n-2}$, ceux qui répondent a $x_2-x_3,\ldots, x_2-x_n$, etc., p le degré de l'invariant par rapport aux coefficients, on doit avoir

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}=p,\\ \alpha_1+\beta_1+\ldots+\beta_{n-2}=p,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_{n-1}+\beta_{n-2}+\ldots+\varkappa_1=p,\end{gathered}$$

ce qui, par l'addition totale, redonne $\frac{np}{2}$ pour le degré, quant aux racines.

Si l'on conçoit la fonction la plus générale des différences des racines, dont les exposants vérifient les relations ci-dessus et que l'on suppose écrits sur une même ligne horizontale les termes où, les racines étant dans le même ordre, les exposants constituent des solutions distinctes des équations précédentes, de telle sorte qu'en permutant, dans chacun de ces termes, les racines de toutes les manières possibles, les diverses séries des termes déduits ne puissent avoir en commun aucun de ces derniers termes; en supposant enfin ces mêmes séries écrites chacune en colonne verticale, et affectant individuellement chaque terme d'un coefficient spécial, on aura le tableau de la fonction la plus générale des différences remplissant les conditions voulues. Si, maintenant, cette fonction n'est qu'une seconde forme donnée à une fonction symétrique des simples racines, elle devra, comme celle-ci, rester indifférente aux permutations imposées aux dites racines. Et comme ces permutations imposées simultanément et de la même maniere aux diverses colonnes verticales, n'ont d'autre effet que d'y changer respectivement les termes les uns dans les autres, sans les transporter d'une colonne à l'autre, l'indifférence nécessaire de forme devra se manifester séparément et librement dans chacune des colonnes mentionnées; c'est-à-dire que chacune d'elles devra représenter une fonction symétrique des racines.

On aura donc autant d'invariants distincts qu'il y aura de pareilles fonctions symétriques.

Dans la recherche du terme fondamental de chacune de ces fonctions, il ne suffira pas que la permutation de deux racines quelconques ne reproduise pas ce terme au signe près. Il faudra de plus que ce signe ne change pas quand on changera le signe de toutes les différences; ce qui veut dire que le nombre des exposants impairs devra être pair. Cette condition résulte immédiatement de l'inspection des équations précédentes qui montrent que la fonction cherchée doit se réduire à la même fonction des racines réciproques quand on la divise par la puissance p du produit des racines. C'est ce qui découle encore du groupement nécessaire A $\begin{pmatrix} a_0^{\lambda_0} \dots a_n^{\lambda_n} \\ a_n^{\lambda_0} \dots a_0^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ signalé au § II. Bien que la solution du problème arithmétique précédent entraîne généralement dans des longueurs que je n'ai pas encore trouvé le moyen d'amoindrir, on peut en déduire néanmoins certaines conséquences immédiates relativement à l'existence de certains invariants. D'ailleurs les ϖ_1, $\varpi_2, \ldots,$ donnent tout de suite par l'addition de leurs puissances $2i$ des invariants de degré $4i$ (par rapport aux coefficients) pour les fonctions de degré quelconque n. Et l'on voit aisément que, par d'autres combinaisons de ces quantités, ou, ce qui est aussi simple, par des groupements directs des racines, on peut former d'autres types pour les invariants du degré mentionné.

Pour reproduire l'invariant quadratique qui se rapporte aux fonctions de degré pair, il suffit évidemment de prendre de deux en deux les différences des racines. Le produit de ces $\frac{n}{2}$ différences donnera par son carré le terme fondamental de la fonction symétrique cherchée. (On peut d'ailleurs obtenir ce terme, comme cela doit toujours être, en combinant les ϖ_1, ϖ_2,..., par simple multiplication et division.)

Dans le cas très-particulier de quatre racines, on peut former le groupe

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_3) (x_2 - x_4),$$

qui correspond à l'invariant cubique pour la fonction du quatrième degré. Soit actuellement $n = 4i$. Si l'on partage les n racines en i groupes contenant chacun quatre racines distinctes, le produit

$$\begin{gathered}[(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)]^{2\alpha} [(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)]^{\beta} \\ \pm [(x_5 - x_6)(x_7 - x_8)]^{2\alpha'} [(x_5 - x_7)(x_6 - x_8)]^{\beta'} \ldots,\end{gathered}$$

où

$$2\alpha + \beta = 2\alpha' + \beta' = p$$

(les α étant différents de zéro), correspondra à un invariant de degré quelconque p (*un* excepté) pour les fonctions de degré $4i$. En prenant les diverses solutions de l'équation

$$2\alpha + \beta = p,$$

et affectant *un, deux, trois* des groupes dont il s'agit d'une même solution ou de solutions différentes (en se bornant bien entendu aux groupements qu'on ne peut pas déduire les uns des autres par la simple permutation des racines), on donnera lieu à autant d'invariants de même degré p se rapportant à la fonction considérée [*].

[*] Pour le cas de $n = 5$, $p = 18$, il m'a semblé qu'on ne pouvait pas satisfaire aux conditions de partition indiquées, sous la condition d'avoir un nombre pair d'expo-

n étant quelconque, si on le suppose partagé en h parties telles que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_h = n,$$

et qu'on ait formé avec les n_1 premières lettres, puis avec les n_2 suivantes, etc., h types ou produits particuliers pouvant respectivement donner lieu à des invariants d'un même degré q pour les fonctions des degrés n_1, $n_2, \ldots, n_h$; en multipliant tous ces produits entre eux, on obtiendra évidemment le terme caractéristique d'une fonction symétrique propre à représenter des invariants du même degré q pour la fonction de degré n; et si, pour une même valeur de q, les types particuliers sont susceptibles de plusieurs formes différentes, il en naîtra généralement pour le type résultant un nombre de formes égal au produit des nombres des formes particulières.

On comprend que je ne me suis pas proposé de trouver ici combien, pour une valeur donnée de n, il existe d'invariants d'un même degré p, linéairement indépendants, pas plus que le nombre et le degré des invariants *fondamentaux*, c'est-à-dire des invariants par lesquels on peut exprimer rationnellement tous les autres. J'ai eu, comme on voit, principalement en vue les notions primordiales qui président à la théorie des invariants.

IV.

J'ajouterai quelques mots sur les invariants qui naissent des substitutions orthogonales. Ils sont déterminés ici par l'équation unique

$$\sum_{i=1}^{i=n} i\left(a_{i-1}\frac{d\varphi}{da_i} - a_{n-i+1}\frac{d\varphi}{da_{n-i}}\right) = 0.$$

Pour les rapporter aux variables $a, x_1, x_2, \ldots$, j'introduis directement dans la fonction (a) du précédent paragraphe la substitution ortho-

sants impairs. Ce qui se trouverait en contradiction avec un résultat de M. Hermite, résultat dont le manque de certains détails empêche de vérifier la complète exactitude. Voir la *Théorie des Fonctions homogènes à deux indéterminées*. Cambridge and Dublin, 1854.

gonale

$$x = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,$$
$$y = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon,$$

ce qui revient à changer

$$a, \quad x_1, \ldots, \quad x_n$$

dans

$$a' = a(\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon)\ldots(\cos\varepsilon - x_n\sin\varepsilon), \quad x'_1 = \frac{\sin\varepsilon + x_1\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon}, \ldots$$

Donc, en observant que

$$\frac{da'}{d\varepsilon} = -a'(x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n), \quad \frac{dx'_1}{d\varepsilon} = 1 + x'^2_1, \ldots,$$

l'invariabilité de forme de la fonction φ sera assurée par cette équation

$$(1 + x_1^2)\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + (1 + x_n^2)\frac{d\varphi}{dx_n} = a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\frac{d\varphi}{da},$$

qui est satisfaite en prenant pour φ une fonction arbitraire des

$$v = a^2(1 + x_1^2)\ldots(1 + x_n^2),$$
$$v_{h,i} = \frac{x_h - x_i}{1 + x_h x_i}.$$

On a donc en particulier, et pour une valeur quelconque de n, l'invariant quadratique v qu'on peut aisément exprimer par les coefficients de f. Pour obtenir d'autres invariants entiers et rationnels, on peut, par exemple, former l'équation qui a pour racines les $v_{h,i}$. Quant aux invariants simplement rationnels, leur formation s'aperçoit d'elle-même.

Si l'on considère la substitution très-simple

$$x = -\frac{1}{\varepsilon}y, \quad y = \varepsilon x,$$

son introduction dans l'équation (1), § II, change immédiatement

$$a_0, \quad a_1, \ldots, \quad a_n$$

en

$$a'_0 = a_n \varepsilon^n, \quad a'_1 = - a_{n-1} \varepsilon^{(n-2)}, \ldots, \quad a'_{n-1} = \mp a_1 \varepsilon^{-(n-2)}, \quad a'_n = \pm a_0 \varepsilon^{-n},$$

d'où résulte, en prenant $2i \overline{\overline{<}} n$,

$$\frac{da'_i}{d\varepsilon} = (n - 2i) a'_i \varepsilon^{-1}, \quad \frac{da'_{n-i}}{d\varepsilon} = - (n - 2i) a'_{n-i} \varepsilon^{-1}.$$

Pour que φ échappe à l'influence de la substitution précédente, on devra donc avoir, en ne tenant pas compte des accents,

$$\sum_i (n - 2i) \left(a_i \frac{d\varphi}{da_i} - a_{n-i} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} \right).$$

Cette équation s'intègre immédiatement et reproduit pour $n = 5$ un résultat énoncé par M. Hermite dans le Mémoire déjà cité.

V.

Soient, en général,

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \ldots, \quad z_n$$

$n + 1$ variables parfaitement indépendantes, et z', z'_1, $z'_2, \ldots$, z'_n, $n + 1$ autres variables qui leur correspondent; soit enfin ε un paramètre ou variable tout à fait arbitraire, et considérons les équations

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz'}{d\varepsilon} = \theta\,(z', z'_1, \ldots, z'_n), \\ \dfrac{dz'_1}{d\varepsilon} = \theta_1 (z', z'_1, \ldots, z'_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dz'_n}{d\varepsilon} = \theta_n (z', z'_1, \ldots z'_n), \end{cases}$$

θ, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ désignant des fonctions données de z', $z'_1, \ldots$, z'_n, et, si l'on veut, de ε. En intégrant ces équations et remplaçant les $n+1$ constantes qui s'introduisent par des fonctions quelconques des z, z_1, $z_2, \ldots$, z_n, on formera un système de $n + 1$ équations au moyen desquelles il sera permis d'exprimer les z'_i par les z_i, *et vice versâ*. Je désignerai ce système d'équations par (b). Suivant la nature des fonctions θ_i, et aussi suivant la nature des fonctions de $z, z_1, \ldots, z_n$ par lesquelles on aura remplacé les constantes de l'intégration, les expressions des z'_i en $z, z_1, \ldots, z_n$ et ε fournies par le système (b) et conçues développées suivant les puissances de ε, auront des formes différentes et se réduiront, pour $\varepsilon = 0$, à de certaines fonctions $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $z, z_1, \ldots, z_n$. Cela posé, on pourra très-bien se demander qu'une fonction φ des variables $z, z_1, \ldots, z_n$ jouisse de la propriété de se réduire à $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ identiquement, lorsque, dans $\varphi(z, z_1, \ldots, z_n)$, on vient à remplacer $z, z_1, \ldots, z_n$ respectivement par les expressions de z'_i en z, z_1, z_n, ε déduites du système (b). La condition nécessaire et suffisante pour que cette circonstance ait lieu étant évidemment qu'après la substitution on ait

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = 0;$$

au moyen des relations (a), on écrira sur-le-champ l'équation différentielle qui assure à φ la propriété demandée. Puis, au moyen du système (b), où ε jouera le rôle de paramètre arbitraire, on substituera, dans l'équation différentielle en z'_i, les variables z_i aux variables z'_i, substitution qui se fera dans bien des cas par la simple suppression des accents.

Une seconde hypothèse faite sur la forme des fonctions θ_i et sur celles qu'on substitue aux constantes de l'intégration du système (a) conduira à une autre équation différentielle qui sera l'expression d'une propriété de la fonction φ d'un genre analogue au précédent. Autant on fera de pareilles hypothèses, autant on aura d'équations aux différences partielles que la fonction φ devra vérifier simultanément. On voit que ceci comprend comme cas très-particulier l'idée première de la théorie des invariants, considérée au point de vue le plus général, théorie dans laquelle les substitutions linéaires qu'on peut partager en substitutions partielles, à paramètre variable unique, sont le moyen intermédiaire qui permet d'arriver à la modification des coefficients, modification qu'on se donne d'ailleurs d'avance, et qui revient à considérer immédiatement le système (b) pour en déduire le système (a). Remarquons qu'au lieu de concevoir les expressions des z'_i en $z, z_1, \ldots, \varepsilon$ développées suivant les puissances de ε en prenant pour premier terme ce que z'_i devient pour $\varepsilon = 0$, on peut prendre une autre valeur initiale répondant à $\varepsilon = k$, k étant une quantité fixe et déterminée. Remarquons aussi que lorsque, après avoir formé l'équation différentielle en z'_i, on reviendra aux variables z_i au moyen du système (b), ε pourra, dans certains cas, se trouver mêlé et en évidence dans les divers termes de l'équation différentielle, laquelle alors se partagerait en plusieurs autres.

On peut se convaincre aisément que toutes les équations différentielles, considérées dans les précédents paragraphes, peuvent s'obtenir par cette méthode, dont on peut déduire, par des hypothèses convenables, certains résultats présentant quelque intérêt.

RÉDUCTION

D'UNE

INTÉGRALE MULTIPLE,

QUI COMPREND L'ARC DE CERCLE ET L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE COMME CAS PARTICULIERS;

PAR M. LOUIS SCHLAEFLI,

Professeur à l'Université de Berne.

On a réduit depuis longtemps l'intégrale multiple

$$\int^n dx\,dy\,dz\ldots,\quad (x^2+y^2+z^2+\ldots<1)$$

c'est-à-dire l'intégrale $\int^n dx\,dy\,dz\ldots$ prise pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, y, z,... remplissant la condition

$$x^2+y^2+z^2+\ldots<1,$$

à l'expression $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ qui, pour $n=2$, représente l'aire du cercle, et, pour $n=3$, le volume de la sphère de rayon 1. Mais si l'on demande que l'intégrale proposée représente, pour $n=2$, un secteur de cercle, ou, pour $n=3$, une pyramide sphérique triangulaire, il faut ajouter encore des limites linéaires et homogènes par rapport à toutes les variables, comme $ax+by+\ldots>0$; et l'on a besoin au moins de n inégalités partielles, si l'on veut que la formule proposée ne se réduise pas dès le premier abord à un nombre moindre d'intégrations. Lorsque, au contraire, le nombre des polynômes-limites linéaires surpasse n, on peut toujours partager l'intégrale multiple en plusieurs autres, où ce nombre est précisément n. C'est donc le cas de n limites linéaires qui excite surtout notre attention; et comme il ne m'est pas connu que l'on ait déjà traité cette intégrale ainsi limitée, j'en signalerai quelques propriétés remarquables dans ce Mémoire.

Je commence par un aperçu général de ces propriétés.

1°. Quant au nombre des intégrations indispensables à exécuter, on peut le ramener à $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que le nombre n est pair ou impair; et parmi ces intégrations, la première revient à la rectification du cercle.

2°. Quant au nombre des *arguments* dont dépend la valeur de l'intégrale définie, on comprend d'abord qu'il n'est pas égal au nombre n^2 des coefficients des variables dans les polynômes-limites, mais qu'il éprouve une forte réduction à cause des transformations linéaires qu'on peut faire subir aux n variables, sans changer la forme de l'expression $x^2+y^2+\ldots$. En effet, ce nombre est $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais il y a plus : on peut partager la fonction générale qui équivaut à l'intégrale proposée, de n manières différentes, en $1.2.3\ldots(n-1)$ fonctions particulières du même genre, dont chacune ne compte que $n-1$ arguments indépendants.

3°. Pour chaque valeur de n plus grande que 2, il y a un nombre déterminé de cas où l'intégrale limitée par des polynômes linéaires a un rapport rationnel avec l'intégrale totale de même espèce, $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. C'est dans ces cas que rentre, pour $n=3$, la question des polyèdres réguliers, puisqu'elle fournit le moyen de partager la sphère (ou son septuple) en parties superposables. Pour $n=4$ on trouvera plus bas, entre autres, un exemple où l'intégrale totale

$$\int\int\int\int dw\,dx\,dy\,dz, \quad (x^2+y^2+z^2+w^2<1),$$

est partagée en 14400 intégrales partielles, séparées par des limites linéaires et homogènes, et superposables au moyen de substitutions de la même forme.

§ I.

Arguments primitifs et dérivés d'un plagioschème sphérique.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des polynômes linéaires et homogènes par rapport aux n variables $x, y, \ldots$, que je suppose tous indépendants entre eux; et soit proposée l'intégrale

$$\mathrm{P} = \int^n dx\, dy \ldots,$$
$$(x^2 + y^2 + \ldots < 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots p_n > 0);$$

elle est liée par la relation $\mathrm{P} = \frac{1}{n}\mathrm{S}$ à cette autre,

$$\mathrm{S} = \int^{n-1} \frac{dy\, dz}{x},$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots = 1, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \ldots \quad p_n > 0),$$

ainsi que la pyramide sphérique est le tiers du triangle qui lui sert de base, le rayon étant 1.

Ayant besoin, dans la suite, d'une distinction analogue à celle des triangles obliquangle et rectangle, je nomme S, généralement, *plagioschème sphérique* d'ordre n (car il faut considérer n variables, ou n dimensions, l'intégrale étant toutefois d'ordre $n - 1$ seulement), et pour un de ces cas particuliers je me réserve le nom d'*orthoschème*; enfin j'emploierai le nom de *polyschème*, quand le nombre des limites linéaires surpasse n. La fonction primordiale P pourrait s'appeler (la plus simple) *pyramide sphérique d'ordre* n.

Il est indifférent par quel facteur *positif* on multiplie chaque polynôme-limite; disposons-en donc partout de manière que la somme des carrés de tous les coefficients soit égale à 1. Cela fait, je pose

$$p_1 = a_1 x + b_1 y + \ldots, \quad p_2 = a_2 x + b_2 y + \ldots,$$
$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots = -\cos(12), \text{ etc.}$$

Ces sommes de produits, au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, ne changeront pas de valeur, quelles que soient les substitutions linéaires et homogènes, par lesquelles on transforme les variables, pourvu qu'elles n'altèrent pas la forme de l'expression $x^2+y^2+\ldots$. Or, grâce aux substitutions permises, le nombre des constantes essentielles à la formule intégrale se réduit aussi à $\frac{n(n-1)}{2}\cdot$ On est donc le maître de les égaler à ces sommes de produits. Cependant, l'emploi des notations trigonométriques nous étant très-commode pour la suite, j'introduirai, au lieu des sommes de produits, les angles dont elles sont les cosinus négatifs; et, tout en regardant ces angles comme les variables indépendantes de la fonction S, je ne les nommerai jamais variables, mais *arguments*, afin de les distinguer des *variables* explicites x, y,..., dont il ne reste plus de traces après les intégrations. Je me permettrai, en outre, de dire en bref: tel et tel argument est *compris entre* les deux polynômes-limites qui s'y rapportent. Il est bon d'observer que toutes les fois qu'un argument est nul, les deux polynômes respectifs seront identiquement opposés, et que, par suite, la fonction S s'annulera.

Je nomme *orthogonale* chaque transformation des variables qui laisse l'expression $x^2+y^2+z^2+\ldots$ telle qu'elle est. Deux polynômes-limites seront dits *orthogonaux* l'un à l'autre, quand l'argument compris entre eux est $\frac{\pi}{2}\cdot$)

On peut toujours transformer orthogonalement les n variables, en sorte que les m polynômes $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ ne contiennent pas plus de m des nouvelles variables. Cela fait, après avoir effacé ces m variables dans les autres polynômes, je désigne par $S(\overline{123\ldots m})$ le plagioschème d'ordre $n-m$, formé par les limites $p_{m+1}>0$, $p_{m+2}>0,\ldots$, $p_n>0$ [ou bien $p_{m+1}(\overline{123\ldots m})>0,\ldots$, si l'on veut indiquer que ces $n-m$ nouveaux polynômes-limites sont actuellement orthogonaux aux m anciens $p_1, p_2,\ldots, p_m$]; et afin d'exprimer son rapport avec le plagioschème primitif S, je l'appellerai un de ses *périschèmes* d'ordre $n-m$ ou du $m^{ième}$ *rang*. (Ainsi les périschèmes du premier rang d'un triangle sphérique en seraient les côtés, et ceux du second les sommets.) Puis, je désigne les $\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)$ arguments de ce périschème par $[\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+2)]$,..., et les nomme *arguments dérivés* $m^{ièmes}$ du plagioschème S. Chaque périschème d'ordre 2 a un seul argument et se confond, par suite, avec celui-ci; je distingue donc les arguments dérivés de rang $n-2$ par le nom de *côtés* du plagioschème S. Voici une proposition qui s'y rapporte :

Les mêmes équations qui expriment les côtés en fonction des arguments, subsisteront encore lorsque l'on aura remplacé les côtés par les suppléments des arguments, et les arguments par les suppléments des côtés.

Les trois arguments dérivés du premier rang $(\bar{1}, 23)$, $(\bar{2}, 13)$, $(\bar{3}, 12)$ dépendent tellement des trois arguments primitifs (23), (13), (12), que l'on peut prendre les premiers pour les côtés d'un triangle sphérique dont les derniers sont les angles. On trouvera, par conséquent, tous les arguments du périschème $S(\bar{1})$, au moyen de la formule

$$\cos(\bar{1}, ik) = \frac{\cos(ik) + \cos(1i)\cos(1k)}{\sin(1i)\sin(1k)};$$

puis on aura des formules semblables pour les arguments du périschème $S(\overline{12})$ en fonction de ceux du périschème $S(\bar{1})$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne aux côtés du plagioschème S.

Il va sans dire que les expressions immédiates de $\cos^2(\overline{12\ldots m}, ik)$ et $\sin^2(\overline{123\ldots m}, ik)$ sont des fractions rationnelles, dont le dénominateur commun est le produit de deux déterminants à $m+1$ rangs, tandis que le numérateur de la première est le carré d'un déterminant à $m+1$ rangs, et celui de la seconde le produit d'un déterminant à m rangs et d'un autre à $m+2$ rangs. Tous ces déterminants sont formés de cosinus d'arguments primitifs, et d'unités.

§ II.

Théorème fondamental sur les plagioschèmes sphériques.

« La fonction dérivée du plagioschème S, relative à l'un quelconque
» de ses arguments, est la $(n-2)^{\text{ième}}$ partie du périschème (de rang 2),
» provenant de la suppression des deux polynômes-limites, entre les-
» quels cet argument est compris. »

Pour le dire plus proprement, cette suppression concerne les deux nouvelles variables qui, après une transformation convenable, figurent seules dans les deux polynômes mentionnés tout à l'heure.

Donc la différentielle complète du plagioschème S s'exprime par cette formule :

$$dS = \frac{1}{n-2}\left\{\begin{aligned} &S(\overline{12}).d(12) + S(13).d(13) + \ldots \\ &\qquad\qquad + S[\overline{(n-1)n}].d[(n-1)n] \end{aligned}\right\}.$$

Lors de l'intégration du second membre, on peut supposer constants tous les arguments moins un, et commencer avec une telle valeur de celui-ci, qu'elle anéantisse tous les côtés du plagioschème, et établisse, par conséquent, une dépendance entre les polynômes-limites.

Pour $n=2$, on a $S=(12)$, c'est-à-dire que l'arc de cercle de rayon 1 est identique avec son argument; et, pour $n=3$, on a

$$dS = d(12) + d(13) + d(23).$$

Dans ces deux cas, l'emploi de l'argument, au lieu de son cosinus, doit être compté pour une intégration. Il suit donc du présent théorème, que l'évaluation de S exige seulement $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ intégrations successives, suivant que l'ordre n est pair ou impair.

Ainsi que l'angle droit sert de mesure naturelle aux autres angles, et le triangle trirectangle aux autres triangles sphériques, de même le plagioschème qui a tous les arguments égaux à $\frac{\pi}{2}$, sert de mesure naturelle aux autres plagioschèmes; sa valeur est $\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, et celle de la pyramide correspondante $\frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Conduit par cette réflexion, et voulant débarrasser les formules ultérieures des fonctions Γ, j'introduis une nouvelle *fonction sphérique* f, définie par l'équation

$$S = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} f \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} f.$$

Elle sera dite *comprise entre* les polynômes $p_1, p_2, \ldots, p_n$; et, quand il en sera besoin, je la désignerai par $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ou plus simplement par $f(123\ldots n)$. En employant cette notation, on a, par exemple,

$$(a)\quad f(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) + f(-p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = 2f(p_2, p_3, \ldots, p_n),$$

où, dans le second membre, je suppose qu'une transformation orthogonale a précédé, en vertu de laquelle les polynômes $p_2, p_3, \ldots, p_n$ ne contiennent plus que $n-1$ nouvelles variables. L'arc de cercle, mesuré par le quadrant, s'exprime par

$$f(12) = \frac{2}{\pi}(12),$$

le triangle sphérique, mesuré par le triangle trirectangle, par

$$f(123) = f(12) + f(13) + f(12) - 2.$$

A l'occasion de la dernière formule, il convient de remarquer que l'on a pareillement

$$f(12345) = f(2345) + \ldots - 2\{f(12) + \ldots\} + 16,$$

formule que l'on verra généralisée au paragraphe suivant.

L'équation différentielle fondamentale devient

$$df(123\ldots n) = f(\overline{12}, 34\ldots n).d(12) + \ldots.$$

Lorsque chacun des polynômes $p_1, p_2, \ldots, p_m$ est orthogonal à chacun des autres $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$, on a

$$(b)\quad f(123\ldots n) = f(123\ldots m).f[(m+1)(m+2)\ldots n];$$

et quand p_1 seul est orthogonal à tous les autres polynômes, on a

$$(c)\quad f(123\ldots n) = f(23\ldots n).$$

§ III.

Réduction des plagioschèmes d'ordre impair à ceux d'ordre pair.

Les nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant définis par le développement

$$(d) \qquad \operatorname{tang} X = \sum a_i \frac{X^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)},$$

on a le théorème suivant.

Marquons l'ordre d'une fonction sphérique par un indice placé au bas de la lettre f; de la sorte soit f_{2n+1} la fonction comprise entre les polynômes $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$ et $\sum f_{2m}$ la somme de toutes les fonctions comprises chacune entre $2m$ de ces mêmes polynômes (sous-entendu que $f_0 = 1$, $\sum f_0 = 1$); alors on a

$$(e) \qquad f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \sum f_{2n-2i}.$$

(Le nombre entier a_i est positif et divisible par 2^i.)

Lorsque l'on suppose qu'un des polynômes-limites est orthogonal à tous les autres, on est conduit à la formule

$$a_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{2n}{2i+1} a_i a_{n-i-1},$$

qui exprime une des nombreuses relations connues entre les nombres de Bernoulli.

§ IV.

Partager le plagioschème en orthoschèmes.

Si l'on peut ranger les polynômes-limites $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en sorte que chacun soit orthogonal à tous les autres, sauf celui qui le précède ou le suit immédiatement; si donc, l'ordre actuel étant d'accord avec l'hypothèse, les $n-1$ arguments $(12), (23), (34), \ldots [(n-1)n]$ seuls, dont chacun est compris entre deux polynômes consécutifs, restent quelconques, tandis que tous les autres arguments sont égaux à $\frac{\pi}{2}$; je nomme l'intégrale S un *orthoschème,* et, en parlant de ses arguments, je n'entends que les $n-1$ premiers. Il est clair qu'on peut renverser l'ordre des polynômes, mais non pas le changer autrement.

C'est aussi définir l'orthoschème que d'admettre une transformation orthogonale des variables, telle que p_1 coïncide avec la première des nouvelles variables, que p_2 n'en contienne que la première et la deuxième, p_3 la deuxième et la troisième, p_4 la troisième et la quatrième, et ainsi de suite, et qu'enfin p_n ne contienne que les deux dernières variables. Au surplus, cette chaîne de variables s'attache à l'ordre des polynômes-limites; pour l'ordre inverse elle change tout à fait.

Une autre propriété de l'orthoschème consiste en ce que tous ses périschèmes sont des orthoschèmes inférieurs, et que les polynômes-limites de l'un quelconque d'entre eux suivent, abstraction faite de lacunes, le même ordre que ceux primitifs correspondants. Voici les formules qui servent à calculer les arguments dérivés :

$$\cos\left[\overline{m}, (m-2)(m-1)\right] = \frac{\cos[(m-2)(m-1)]}{\sin[(m-1)m]},$$

$$\cos\left[\overline{m}, (m+1)(m+2)\right] = \frac{\cos[(m+1)(m+2)]}{\sin[m(m+1)]},$$

$$\cos\left[\overline{m}, (m-1)(m+1)\right] = \cot[(m-1)m]\cot[m(m+1)];$$

loin de la lacune, quand $i < m-2$ ou $> m+1$, on a simplement

$$\left[\overline{m}, i(i+1)\right] = \left[i(i+1)\right].$$

Bien que ces formules ne fournissent immédiatement que les arguments du périschème $S(\overline{m})$, c'est-à-dire les premiers arguments dérivés, on n'a pourtant qu'à continuer de la manière indiquée, pour obtenir encore ceux des rangs suivants.

Après ces préparatifs nous sommes à même de partager le plagioschème S en orthoschèmes. Concevons une solution quelconque A de l'équation

$$x^2 + y^2 + \ldots = 1,$$

et désignons par $a(1)$, $a(2)$, $a(3), \ldots$, $a(n)$ les valeurs correspondantes des polynômes-limites; alors, au moyen des équations successives

$$a(\overline{1}, m) = \frac{a(1)\cos(1m) + a(m)}{\sin(1m)}. \qquad [m = 2, 3, 4, \ldots n]$$

$$a(\overline{12}, m) = \frac{a(\overline{1}, 2)\cos(\overline{1}, 2m) + a(\overline{1}, m)}{\sin(\overline{1}, 2m)}, \qquad [m = 3, 4, \ldots n]$$

$$a(\overline{123}, m) = \frac{a(\overline{12}, 3)\cos(\overline{12}, 3m) + a(\overline{12}, m)}{\sin(\overline{12}, 3m)}, \quad [m = 4, 5, \ldots n] \ldots.$$

$$a\left[\overline{12\ldots(n-1)}, n\right]$$
$$= \frac{a\left[\overline{12\ldots(n-2)}, n-1\right]\cos\left[\overline{12\ldots(n-2)}, (n-1)n\right] + a\left[\overline{12\ldots(n-2)}, n\right]}{\sin\left[\overline{123\ldots(n-2)}, (n-1)n\right]},$$

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{a(1)}{a(\overline{1}, 2)}, \quad \operatorname{tang}\beta_2 = \frac{a(\overline{1}, 2)}{a(\overline{12}, 3)}, \quad \operatorname{tang}\beta_3 = \frac{a(\overline{12}, 3)}{a(\overline{123}, 4)} \cdots,$$

$$\operatorname{tang}\beta_{n-1} = \frac{a\left[\overline{123\ldots(n-2)}, n-1\right]}{a\left[\overline{123\ldots(n-1)}, n\right]},$$

on obtiendra

$$\cos\beta_1, \ \sin\beta_1\cos\beta_2, \ \sin\beta_2\cos\beta_3, \ \sin\beta_3\cos\beta_4, \ldots, \ \sin\beta_{n-2}\cos\beta_{n-1},$$

comme cosinus des arguments de l'orthoschème correspondant à la permutation $123\ldots n$. En traitant de la sorte chaque permutation, on obtiendra un ensemble de $1.2.3\ldots(n-1).n$ orthoschèmes, qui remplit le plagioschème donné S. Il se partage en n groupes, dont chacun compose un plagioschème qui a la solution A pour sommet et un des périschèmes $S(\overline{1})$, $S(\overline{2})$, $S(\overline{3}), \ldots$, $S(\overline{n})$ pour base; on verra donc sans peine que, si la solution A coïncide avec le sommet $(p_2 = 0, \ p_3 = 0, \ldots, \ p_n = 0)$ du plagioscheme entier S, il ne restera que le premier groupe ayant $S(\overline{1})$ pour base, et que tous les autres s'anéantiront. Dans ce cas, on aura partagé S en $1.2.3\ldots(n-1)$ orthoschèmes, et c'est évidemment le plus petit nombre possible de parties; au reste, il est visible que cette dissection ne peut être effectuée que de n manières différentes.

Puisque la connaissance des $n-1$ arguments de chaque orthoschème doit suffire pour calculer sa valeur au moyen de $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$

intégrations successives, le but que je m'étais proposé dans ce paragraphe serait maintenant atteint. Mais, afin de rendre plus familieres les idées qui s'attachent à notre objet, je vais encore ajouter quelques remarques.

L'expression $a(\overline{123\ldots i}, m)$ ne change pas, quel que soit l'ordre des chiffres sous le trait. Lorsque les variables qu'elle contient ne sont plus attachées à la solution A, mais libres, je désigne par $p(\overline{123\ldots i}, m)$ la même expression dans ce nouveau sens.

La totalité des solutions qui font évanouir ce polynôme $p(\overline{12\ldots i}, m)$, contient (ou *passe par*) le périschème $S(\overline{123\ldots im})$, et est orthogonal aux périschèmes $S(\bar{1})$, $S(\bar{2}), \ldots,$ $S(\bar{i})$.

A l'aide de ces nouveaux polynômes l'équation

$$x^2 + y^2 + \ldots = 1$$

se change en

$$\begin{aligned} p(1)^2 + p(\bar{1}, 2)^2 + p(\overline{12}, 3)^2 + p(\overline{123}, 4)^2 + \ldots \\ + p(\overline{12\ldots(n-1)}, n)^2 = 0. \end{aligned}$$

Les arguments de l'ortoschème O considéré plus haut font connaître sa forme et, par suite, sa valeur, mais non pas sa position comme partie du plagioschème entier S; pour cela, il faut avoir les polynômes-limites q_1, q_2, q_3, ..., q_n de O en fonction des variables primitives. En voici les expressions :

$$q_1 = p(1),$$

$$q_2 = \frac{a(1)p(2) - a(2)p(1)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\bar{1}, 2)^2}}, \quad q_3 = \frac{a(\bar{1}, 2)p(\bar{1}, 3) - a(\bar{1}, 3)p(\bar{1}, 2)}{\sin(\bar{1}, 23)\sqrt{a(\bar{1}, 2)^2 + a(\overline{12}, 3)^2}}, \ldots,$$

$$q_m = \frac{a[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]\,p[\overline{12\ldots(m-2)}, m] - a[\overline{12\ldots(m-2)}, m]\,p[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]}{\sin[\overline{12\ldots(m-2)}, (m-1)m]\sqrt{a[\overline{12\ldots(m-2)}, m-1]^2 + a[\overline{12\ldots(m-1)}, m]^2}}.$$

Si l'on ne tient pas à la condition que la somme des carrés des coefficients soit égale à 1, on peut remplacer l'équation

$$q_m = 0$$

par celle-ci :

$$\left| \begin{matrix} -\cos(i1) \quad -\cos(i2) \ldots \quad -\cos[i(m-2)].\ a(i).\ p(i) \\ [i = 1, 2, 3, \ldots m-1, m] \end{matrix} \right| = 0.$$

Ici le premier membre représente un déterminant, formé par m lignes horizontales, dont chacune contient autant d'éléments; il va sans dire que $-\cos(ii) = 1$. Pour abréger, je n'ai écrit que la $i^{ième}$ ligne. Cette forme de l'équation $q_m = 0$ fait d'abord voir que la totalité de ses solutions contient la solution A (excepté $m = 1$) et tout le périschème $S(\overline{123\ldots m})$; en second lieu, après une transformation convenable, que le polynôme q_m est orthogonal à tout polynôme de la forme

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{m-2} p_{m-2},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-2}$ désignent des constantes arbitraires; enfin, que la permutation des indices $1, 2, 3, \ldots m-2$ n'influe aucunement sur le polynôme q_m. Je laisse au lecteur de pousser ces observations jusqu'aux dernières conséquences que je ne saurais énoncer sans circonlocutions; mais il parviendra ainsi assurément à s'imaginer la dissection du plagioschème S en orthoschèmes, avec la même clarté qu'un objet de la géométrie.

§ V.

Réduction des orthoschèmes d'ordre impair à ceux d'ordre pair.

La proposition dont il s'agit ici donne lieu à une observation préalable.

Si $f(123\ldots n)$ est une fonction orthoschématique, les chiffres se rapportant aux polynômes-limites, et que l'on ôte quelques-uns de ces polynômes, en sorte que leur ordre significatif soit interrompu çà et là par des lacunes, les polynômes de chaque suite *continue* seront orthogonaux à tous ceux hors de cette suite, et, pour cette raison, la fonction dont il s'agit viendra à se décomposer en autant de facteurs orthoschématiques qu'il y a de suites continues entre les lacunes.

Par exemple, si $i+1 < m < n$, on a

$$f[123\ldots im(m+1)\ldots n] = f(123\ldots i).f[m(m+1)\ldots n].$$

Proposition. Soit f_{2n+1} une fonction orthoschématique d'ordre impair, limitée par une suite totale de $2n+1$ polynômes; que l'on en ôte $2i+1$ polynômes de toutes les manières possibles, pourvu que chaque suite continue entre deux lacunes contienne un nombre *pair* de polynômes, et qu'on désigne ensuite la somme de toutes les fonctions correspondantes auxdites combinaisons de polynômes-limites par $\sum f_{2n-2i}$ (les termes de cette somme seront partie fonctions uniques, partie produits de fonctions, suivant que la suite respective des polynômes sera continue ou interrompue par des lacunes); alors la réduction prédite s'effectuera à l'aide de cette formule

$$f_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \sum f_{2n-2i}.$$

Si peut-être l'énoncé de la proposition n'est pas encore assez clair, ces quelques exemples y suppléeront :

$$\begin{aligned}
f(123) &= f(23) + f(12) - 1,\\
f(12345) &= f(2345) + f(12)f(45) + f(1234)\\
&\quad - \{f(45) + f(34) + f(23) + f(12)\} + 2,\\
f(1234567) &= f(234567) + f(12)f(4567)\\
&\quad + f(1234)f(67) + f(123456)\\
&\quad - \left\{\begin{aligned} & f(4567) + f(34)f(67) + f(3456) + f(23)f(67)\\ &\qquad + f(23)f(56) + f(2345) + f(12)f(67)\\ &\qquad + f(12)f(56) + f(12)f(45) + f(1234)\end{aligned}\right\}\\
&\quad + 2\{f(67) + f(56) + f(45) + f(34) + f(23) + f(12)\} - 5.
\end{aligned}$$

§ VI.

Périodes d'orthoschèmes.

Dans l'expression de f_{2n+1} que nous venons de connaître, les fonctions les plus élevées se trouvent seulement au nombre de deux; car, en replaçant les chiffres affectés aux polynômes-limites, on a

$$f[123\ldots(2n)(2n+1)] = f[234\ldots(2n)(2n+1)] + f[123\ldots(2n)]$$
+ une expression entière en fonctions inférieures.

Or, si l'on assujettit les $2n$ arguments donnés à la condition que, dans le premier membre, la fonction d'ordre impair soit nulle, la somme des deux fonctions orthoschématiques d'ordre $2n$ deviendra égale à une fonction rationnelle et entière d'orthoschèmes inférieurs, dont tous sont aussi d'ordre pair. Je suppose que l'on continue la suite des arguments, en se servant toujours de la même condition, pour trouver, chaque fois, le dernier de $2n$ arguments successifs; mais en procédant de la sorte, on s'apercevra bientôt que la série des arguments devient périodique; car après le $(2n+2)^{ième}$ argument reparaîtra le premier, puis le second, et ainsi de suite. De plus, comme chaque équation de condition entre $2n$ arguments successifs entraîne une équation qui exprime la somme de deux fonctions orthoschématiques d'ordre $2n$, il en résultera une série périodique d'orthoschèmes douée de cette propriété : « Quels que soient les deux orthoschèmes qu'on retire de la série, on saura toujours en exprimer ou la somme ou la différence, suivant le nombre pair ou impair des termes interceptés. » Si c'était la somme, et que ces deux termes fussent *égaux* entre eux, on aurait réussi à représenter un orthoschème d'ordre $2n$ comme fonction rationnelle et entière d'orthoschèmes d'ordres pairs et inférieurs.

Afin d'amener l'égalité de deux orthoschèmes de la période, je choisis le moyen le plus facile, la superposition; car autrement on s'engagerait dans des difficultés rebutantes. Je suppose donc les arguments de l'un des deux orthoschèmes respectivement égaux à ceux de l'autre. Or il y a deux cas : égalité suivant l'ordre direct ou suivant l'inverse.

I. Quant au premier cas, il est d'abord évident que les $2n+2$ arguments de la période doivent former un nombre entier de groupes directement égaux; en second lieu, puisque c'est la somme des deux orthoschèmes égaux que l'on veut avoir, mais non la différence, il faut que le groupe comprenne un nombre impair d'arguments; donc la période contiendra un nombre pair de groupes; et, partant, tous les cas possibles rentrent dans celui où ce nombre est deux, en sorte que le groupe contient $n+1$ arguments. Il faut donc encore que n soit pair, c'est-à-dire, que l'ordre des orthoschemes en question soit divisible par 4, pour que ce premier cas puisse avoir lieu. Je vais maintenant l'examiner en détail.

Que la période des $2n+2$ arguments soit

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \theta,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \theta.$$

Chacun des trois derniers, d'après ce que j'ai dit plus haut, doit être la même fonction donnée des $2n-1$ arguments qui le précèdent. Il paraît donc y avoir trois équations de condition. Mais toutes les trois reviennent à une seule que voici :

$$(f)\qquad 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\ldots\cos\eta\cos\theta + \begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -\cos\theta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\cos\zeta & 1 & -\cos\eta \\ -\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\cos\eta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La forme même de cette équation fait voir que celle-ci ne change pas, lorsqu'on remplace la suite $\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta$ par $\beta\gamma\ldots\eta\theta\alpha$. D'ailleurs, les n arguments $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots\zeta,\ \eta$ étant donnés arbitrairement, on trouvera le $(n+1)^{ième}\ \theta$, en employant une sorte de séries récurrentes, dont la loi est expliquée par les fractions continues que voici :

$$\frac{\Delta(\alpha,\ \beta,\ldots,\ \zeta,\ \eta)}{\Delta(\beta,\ldots\zeta,\ \eta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\alpha}{1 - \cfrac{\cos^2\beta}{1 - \cfrac{\cos^2\gamma}{1 - \cfrac{\ddots}{1 - \cfrac{\cos^2\zeta}{1-\cos^2\eta}}}}},$$

et

$$\frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\eta}{1 - \cfrac{\cos^2\zeta}{1 - \cfrac{\cos^2\varepsilon}{1 - \cdots - \cfrac{\cos^2\gamma}{1 - \cos^2\beta}}}};$$

on a ensuite

$$\cos^2 6 = \frac{\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \zeta, \eta)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \varepsilon, \zeta)},$$

c'est-à-dire, égal au produit des deux fractions continues. Si cette équation unique (f) sera remplie, et que l'ordre $2n$ soit divisible par 4, la fonction orthoschème $f_{2n}(\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon\zeta\eta\theta\alpha\beta\gamma\ldots\varepsilon)$ s'exprimera d'une manière rationnelle et entière par des fonctions d'ordres pairs et inférieurs. Ici comme dans ce qui va suivre, je désigne l'orthoschème à l'aide de ses arguments sans séparer ceux-ci par des virgules. S'il en sera besoin, je marquerai l'ordre par un indice au bas de la lettre f.

Voici quelques exemples :

Dans l'ordre 4, il faut trois arguments α, β, γ, assujettis à vérifier l'équation

$$(g) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

et l'on aura

$$(h) \qquad 2f(\alpha\beta\gamma) = f(\beta)^2 - [1 - f(\alpha)]^2 - [1 - f(\gamma)]^2.$$

Lorsque tous les trois arguments sont égaux, il s'ensuit

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad f_4 = -\frac{1}{2}f_2^2 + f_2 - 1,$$

c'est-à-dire,

$$f(\alpha, \alpha, \alpha) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2 + \frac{2\alpha}{\pi} - 1.$$

Dans l'ordre 8, il faut que les cinq arguments α, β, γ, δ, ε satisfassent à la condition

$$
\begin{aligned}
1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta - \cos^2\varepsilon + \cos^2\alpha\cos^2\gamma \\
+ \cos^2\beta\cos^2\delta + \cos^2\gamma\cos^2\varepsilon + \cos^2\delta\cos^2\alpha \\
+ \cos^2\varepsilon\cos^2\beta = 0;
\end{aligned}
$$

on aura alors

$$
\begin{aligned}
f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta) = {} & [1 - f(\gamma)]f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon) + [1 - f(\varepsilon)]f(\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta) + f(\delta)f(\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha) \\
& - \frac{1}{2}f(\alpha\beta\gamma)^2 - \frac{1}{2}f(\varepsilon\alpha\beta)^2 - \frac{1}{2}f(\gamma\delta\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}f(\beta\gamma\delta)^2 + \frac{1}{2}f(\delta\varepsilon\alpha)^2 \\
& + [f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)]f(\alpha\beta\gamma) + [f(\varepsilon) + f(\alpha) + f(\beta)]f(\varepsilon\alpha\beta) \\
& + [f(\gamma) + f(\varepsilon)]f(\gamma\delta\varepsilon) - f(\delta)[f(\beta\gamma\delta) + f(\delta\varepsilon\alpha)] \\
& + f(\gamma)f(\varepsilon)[f(\alpha) + f(\beta)] - 2f(\alpha\beta\gamma) - 2f(\varepsilon\alpha\beta) - 2f(\gamma\delta\varepsilon) + f(\delta)^2 \\
& - [f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)]^2 \\
& + 5[f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)] - 7.
\end{aligned}
$$

Quand on égale tous les cinq arguments, la seule solution de l'équation de condition qui rende l'orthoschème réel est

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{10}};$$

alors l'expression de la fonction orthoschème se réduit à

$$f_8 = -f_2f_6 - \frac{1}{2}f_4^2 + 2f_6 + 6f_2f_4 + 2f_2^3 - 6f_4 - 15f_2 + 20f_2 - 7.$$

II. Dans le second cas la période des arguments se partage en deux groupes inversement égaux. Partant, les orthoschèmes respectivement égaux suivront un ordre inverse; il y en aura donc deux consécutifs, qui coïncideront d'une manière inverse. De là on conclura aisément que ces deux fonctions orthoschèmes seront

$$f_{2n}(\beta, \gamma, \ldots, \eta, \theta, \theta, \eta, \ldots, \gamma) \quad \text{et} \quad f_{2n}(\gamma, \ldots, \eta, \theta, \theta, \eta, \ldots, \gamma, \beta),$$

et que la période des $2n + 2$ arguments devra avoir la forme

$$\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta\alpha.$$

Les trois équations de condition étant

$$\Delta(\alpha\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma) = 0,$$
$$\Delta(\beta\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta) = 0,$$
$$\Delta(\gamma\ldots\eta\theta\theta\eta\ldots\gamma\beta\alpha) = 0.$$

on reconnaît que la première et la troisième rentrent l'une dans l'autre ; donc il n'y en a que deux essentiellement différentes ; et lorsque les $n-1$ arguments $\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta$ seront donnés, les deux restants α, θ en dépendront par le moyen des relations

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\gamma, \ldots, \zeta, \eta)}, \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}\frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta, \eta)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots, \zeta)}.$$

Voici des exemples.

Dans l'ordre 4, la période des arguments est $\alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha$, les deux conditions sont $-\cos 2\alpha = -\cos 2\gamma = \cos^2\beta$; donc $\alpha = \gamma$; mais la période $\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha$ n'est qu'un cas particulier de la période $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$, déjà traitée plus haut.

Dans l'ordre 6, la période est $\alpha\beta\gamma\delta\delta\gamma\beta\alpha$, les conditions sont

$$-\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}, \qquad -\cos 2\delta = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

Celles-ci étant remplies, on a

$$\begin{aligned} A = f(\alpha\beta\gamma\delta\delta) = &-f(\alpha)f(\gamma\delta\delta) + f(\beta)f(\beta\gamma\delta) - f(\gamma)f(\alpha\beta\gamma) \\ &+ f(\alpha\beta\gamma) + f(\gamma\delta\delta) + 2f(\alpha)f(\delta) + f(\alpha)f(\gamma) - \tfrac{1}{2}f(\beta)^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}f(\gamma)^2 - 2f(\alpha) - 2f(\gamma) - 2f(\delta) + \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = f(\beta\gamma\delta\delta\gamma) = &-f(\beta)f(\beta\gamma\delta) + f(\gamma\delta\delta) + f(\beta\gamma\delta) + f(\beta)f(\delta) \\ &+ \tfrac{1}{2}[f(\beta) + f(\gamma)]^2 - 2f(\beta) - 2f(\gamma) - 2f(\delta) + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Si les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, A, B, à la fois, se changent respectivement en $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, D, C, la période des orthoschèmes sera ABBADCCD.

Quand tous les arguments sont égaux, il s'ensuit

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{8}}, \quad f_6 = -f_2 f_4 + 2f_4 + 3f_2^2 - 6f_2 + \frac{5}{2}.$$

Je vais terminer ce paragraphe en ajoutant encore une observation sur le cas où tous les arguments de la fonction orthoscheme f_{2n} sont égaux entre eux. Si α en est la valeur commune, je pose $\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\theta}$, et marque par Δ_i la même fonction algébrique qu'auparavant, l'indice i se rapportant à l'ordre de l'orthoschème déterminé par les $i-1$ arguments, sur lesquels s'étend Δ_i. Cela admis, on aura

$$\Delta_i = \frac{\sin(i+1)\theta}{(2\cos\theta)^i \sin\theta}.$$

Si, conformément aux conditions de réalité de l'orthoschème f_{2n}, les fonctions algébriques $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{2n}$ doivent être positives, mais $\Delta_{2n+1} = 0$, la seule solution possible sera $\theta = \frac{\pi}{2n+2}$.

§ VII.

Sur quelques orthoschèmes d'ordre quelconque qui ont, à l'exception de trois ou quatre consécutifs, tous les autres arguments égaux à $\frac{\pi}{3}$.

Proposition I. Si le $m^{\text{ième}}$ argument d'un orthoschème d'ordre n est 2α, le précédent et le suivant étant α, et que tous les autres arguments soient $\frac{\pi}{3}$, cet orthoschème vaut $\binom{n}{m}$ fois autant que lorsque le premier argument est α et que tous les suivants sont $\frac{\pi}{3}$.

[Je désignerai désormais la dernière fonction orthoscheme par $F_n(\alpha)$.]

A l'aide de cette proposition et des formules (a) et (c), § II, on trouve

$$(i) \qquad F_n\left(\frac{\pi}{3}\right) = f_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2^n}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

$$(j) \qquad F_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = f_n\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Je présume que, pour chaque ordre supérieur à 4, ces deux fonctions orthoschèmes sont les seules qui aient des valeurs rationnelles en même temps que tous les arguments sont commensurables avec la circonférence du cercle. Je désire diriger l'attention du lecteur sur ce point, dont la décision me paraît très-difficile.

Proposition II. Lorsque, dans une fonction orthoschème d'ordre n, quatre arguments consécutifs sont $\frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}$, le second de ceux-ci occupant le $m^{\text{ième}}$ rang, tandis que tous les autres arguments sont $\frac{\pi}{3}$, la fonction vaut $\binom{n-1}{m}$ fois autant que lorsque le premier argument est α, le second $\frac{\pi}{4}$ et tous les suivants $\frac{\pi}{3}$.

[Je désignerai désormais la dernière fonction orthoschème par $G_n(\alpha)$.]

Proposition III. La suite de $n+2$ arguments

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda,$$

où $\cos 2\lambda = \frac{1}{n}$, est une période complète et engendre par sa répétition une série infinie qui satisfait aux conditions générales du § VI, c'est-à-dire que la fonction algébrique Δ_{n+1} qui s'étend à n arguments consécutifs, pris à volonté dans la série périodique, est constamment nulle.

Proposition IV. De même, la suite de $n+2$ arguments

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \mu, \mu, \frac{\pi}{4},$$

où $\cos \mu = \sqrt{\frac{1}{n}}$, est une période complète.

Proposition V. Si tous les arguments d'un plagioschème sphérique d'ordre n ont la même valeur 2α (je l'appelle alors *régulier*), il y a une solution A de l'équation $x^2+y^2+z^2+\ldots=1$, qui se comporte comme un centre, et sert, par suite, de sommet commun, à partir duquel on pourra couper le plagioschème en $1.2.3\ldots n$ orthoschèmes superposables et correspondants à la fonction $F_n(\alpha)$. En représentant la fonction plagioschème régulière par $f_n(2\alpha)$ on aura ainsi $f_n(2\alpha) = 1.2.3 \ldots n.F_n(\alpha)$.

Si l'on substitue maintenant cette sorte d'expressions dans la formule (e) du § III, et que l'on définisse les constantes A par

$$\tang x = \sum_{i=0}^{i=\infty} A_i x^{2i+1},$$

on obtiendra la formule de réduction

$$F_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i A_i . F_{2n-2i}(\alpha);$$

et de là, en posant $\cos 2\lambda = \frac{1}{2n}$,

$$F_{2n}(\lambda) = A_1 F_{2n-2}(\lambda) - A_2 F_{2n-4}(\lambda) + A_3 F_{2n-6}(\lambda) - \ldots - (-1)^n A_n.$$

Proposition VI. Lorsque l'intégrale sphérique S d'ordre n est limitée par plus de n polynômes linéaires et homogènes, je la nomme généralement *polyschème sphérique*, et l'on concevra sans peine ce que ce sera qu'un *polyschème régulier*. Or je m'imagine un tel polyschème, dont les limites linéaires, au nombre de 2^{n-1}, sont symétriquement arrangées autour d'un centre (satisfaisant à l'équation $x^2 + y^2 + \ldots = 1$) et forment par leur concours autant de périschèmes plagioschématiques et réguliers d'ordre $n - 1$; deux contigus de ces périschèmes [ce qui arrive $(n-1).2^{n-2}$ fois] comprennent un argument dont la valeur soit 2α. Partant ensuite du centre comme sommet commun, je coupe le polyschème en plagioschèmes d'ordre n, qui aient chacun un périschème pour base; laquelle base formera, avec les $n - 1$ limites coupantes (*latérales*), des arguments tous égaux à α, tandis que les limites coupantes sont toutes orthogonales entre elles. Chacun de ces plagioschèmes composants pourra être coupé de plus, à partir du sommet commun (centre), en $1.2.3 \ldots (n-1)$ orthoschèmes relatifs à la fonction $G_n(\alpha)$ (voir *Prop.* II). Le polyschème sphérique régulier que nous venons de considérer (lorsqu'il est rapporté à l'unité sphérique) vaut donc

$$2^{n-1}.1.2.3\ldots(n-1).G_n(\alpha).$$

Continuant d'agir sur le dernier plagioschème composant, ainsi que l'on a pu le voir dans la Prop. V, on trouve cette formule de réduction

$$G_{2n+1}(\alpha)=\sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i A_i G_{2n-2i}(\alpha)+(-1)^n C_n,$$

où les constantes A sont les mêmes qu'auparavant, et où les constantes C sont définies par l'équation

$$\frac{1}{\cos x}=\sum_{n=0}^{n=\infty} C_n x^{2n}.$$

De là, en posant $\cos\mu=\sqrt{\frac{1}{2n}}$, on tire cette autre formule

$$G_{2n}(\mu)=A_1 G_{2n-2}(\mu)-A_2 G_{2n-4}(\mu)+A_3 G_{2n-6}(\mu)-\ldots-(-1)^n C_n.$$

Dans l'ordre 4, on a $\mu=\frac{\pi}{3}$; donc

$$G_4\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}G_2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{5}{24},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{72}. \tag{k}$$

§ VIII.

Énumération des fonctions-orthoschèmes, d'ordre 4, à valeurs rationnelles et à arguments commensurables avec π.

Si $\frac{\pi^2}{8}f(\alpha,\beta,\gamma)$ est un orthoschème d'ordre 4, et que a, b, c en soient les côtés, le long desquels se forment les arguments α, β, γ; d'après les principes du § II, la différentielle complète de la fonction f sera

$$df(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{4}{\pi^2}(a\,d\alpha+b\,d\beta+c\,d\gamma),$$

où

$$\cos a = \frac{\sin\alpha \cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}, \quad \cos b = -\frac{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}\sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2\beta}},$$

$$\cos c = \frac{\cos\alpha \sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma - \cos^2\beta}}.$$

De plus, on observera que les arguments

$$\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2} - a, b, \frac{\pi}{2} - c$$

constituent une période, dans le sens du § VI. Donc, conjointement avec la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$, on connaîtra encore cinq autres fonctions chacune de trois arguments consécutifs de la série périodique.

Si l'on pose

$$\cos y = \frac{\cos\gamma \sin x}{\sqrt{\sin^2 x - \cos^2\beta}},$$

on a

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{4}{\pi^2}\int^{\alpha} y\, dx,$$

où la limite inférieure est déterminée par $y = 0$. (Afin de lever l'indétermination causée par l'emploi de signes radicaux et trigonométriques, je remarque que dans les exemples qui vont suivre on pourra toujours choisir comme variable de l'intégrale tel argument qui ne sorte pas du premier quadrant.) L'expression à intégrer est remarquable par sa forme : *un arc multiplié par la différentielle d'un autre, lorsque les sinus des deux sont liés algébriquement* ; il est visible qu'on ne peut pas recourir à la méthode de l'intégration par parties. Cependant, comme il y a beaucoup de manières différentes de représenter la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma)$ par une intégrale simple, j'aime mieux conserver la notation primordiale.

Les formules (i) et (j) du § VII donnent sur-le-champ

$$(1) \qquad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{15},$$

et

$$(2) \qquad f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}.$$

La condition (g) § VI, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, n'a que ces deux solutions rationnelles $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$, à moins qu'on ne compte aussi celles qui en proviennent par la permutation de α, β, γ. La première solution fournit, outre (2), encore

$$(3) \qquad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{72},$$

valeur qui s'est déjà trouvée (k) § VII. La seconde solution donne les formules suivantes :

$$(4) \qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{225},$$

$$(5) \qquad f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{45},$$

$$(6) \qquad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{19}{225}.$$

Il suit de (a) § II, que

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = 2f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{14}{15};$$

et de là, en vertu de (6),

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{225}.$$

En appliquant à (4) et à la dernière formule la Prop. I, § VII, on trouve

$$(7) \qquad f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{900},$$

$$(8) \qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{900},$$

$$(9) \qquad f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{150}, \qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{150}.$$

Changeant dans le dernier orthoschème le signe du second polynôme-limite, on obtient

$$f\left(\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{8}{5} - \frac{191}{150} = \frac{49}{150};$$

et de là, par le changement du signe du premier polynome-limite.

$$(10)\qquad f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{11}{150}.$$

Voilà en tout *dix* fonctions orthoschèmes qui ont non-seulement elles-mêmes des valeurs rationnelles, mais dont encore les arguments sont commensurables avec π et compris dans le premier quadrant. Je doute fort qu'il y en ait encore d'autres outre celles-là.

Je termine par quelques observations. Nous venons de connaître trois périodes à termes commensurables, savoir :

1°. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$; [ici se rapportent les formules (2) et (3)];

2°. $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$; [formules (4), (5), (6)];

3°. $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$; [formules (9) et (10)].

Mais les arguments dans (1) et (7) déterminent des périodes à termes en partie incommensurables. Si l'on pose $\cos 2\lambda = \frac{1}{4}$, ces périodes sont :

4°. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda$;

5°. $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda$.

Voici les expressions qui en dérivent :

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) = -\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda\right) = -\frac{8}{15} + \frac{4}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f(\lambda, 2\lambda, \lambda) = -\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{43}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{391}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f\left(\frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{401}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{53}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi}.$$

§ IX.

Polyschèmes linéaires quelconques, et polyschèmes linéaires réguliers.

J'entends par ce mot *polyschème linéaire* l'intégrale multiple

$$\int^n dx dy \ldots, \; (t > 0, t' > 0, t'' > 0, \ldots),$$

lorsque les polynômes-limites t, en nombre pas moindre que $n+1$, sont tous linéaires par rapport aux n variables $x, y, \ldots$, l'homogénéité n'étant pas requise. Si l'on prenait toutes les limites arbitrairement, il pourrait arriver que tel ou tel polynôme-limite ne s'annulât jamais, tant que tous les autres seraient positifs, qu'il ne contribuât donc en rien à la définition de l'intégrale. Quand aucune limite semblable ne sera admise, l'intégrale, telle que je l'ai posée, sera bien définie; car elle se composera seulement d'éléments positifs, dont aucun n'est compté plus d'une fois. Je la désigne alors par l'attribut de *convexité*, bien qu'elle réunisse, suivant moi, les deux propriétés de convexité et de simplicité; mais en adoptant le dernier mot, on tomberait en contradiction avec la multiplicité de l'intégrale. Dans les cas contraires, les inégalités-limites ne suffiront plus à elles seules pour déterminer l'intégrale, mais il faudra encore pour cela des renseignements ultérieurs sur la contiguïté et la configuration des limites données, en tant qu'elles forment par leur concours les *derniers périschèmes*, je veux dire des polyschemes linéaires d'ordre $n-1$. Au reste, on conviendra aisément que, dans tous les cas, l'intégrale sert plutôt à y attacher ces idées d'ordre et de configuration, qu'elle ne fait l'objet principal de la question.

Dans cette partie générale, je ne ferai qu'énoncer ici un théoreme semblable a celui d'Euler sur les polyèdres dans l'espace [*]

Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ respectivement les nombres des sommets, des côtés (arètes), des polygones plans, etc., des derniers périschèmes du polyschème linéaire en question, et enfin soit a_n,

[*] C'est dans une lettre à Goldbach, en date du 14 novembre 1750, qu'Euler semble en parler pour la premiere fois.

ou *l'unité* qui convient au véritable polyschème, tel que je l'ai défini, ou *zéro* qui marque la non-existence d'un pareil polyschème, lorsque les derniers périschèmes ne ferment pas l'étendue d'ordre n, mais bien constituent, pour ainsi dire, une *calotte* ouverte par *une seule* lacune dont le bord est représenté moyennant une intégrale *brisée* et continue d'ordre $n-2$. Alors on aura

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1.$$

La démonstration de ce théorème général ne présente point de difficulté. Je présume même que M. Cauchy l'a déjà donnée dans le *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, cah. 16, p. 80. Car, d'après une Notice de Klügel's *Math. Wörterbuch* (art. *Vieleckiger Korper*), il a étendu, dans le Mémoire cité, le théorème d'Euler à un réseau de polyèdres, revient au même qu'une calotte ouverte d'ordre 4, et peut-être encore plus loin que ne le dit le bref passage cité.

Ce théorème est de nature purement combinatoire, il subsiste encore pour un polyschème *étoilé*, nom qui doit indiquer qu'il y a des éléments dans l'intégrale d'ordre n, comptés plus d'une fois, et que l'ensemble des derniers périschèmes constitue une *enceinte répétée*. A la vérité, cette notion n'est aucunement opposée à la convexité, mais bien à la simplicité.

Quant à la deuxième partie de ce paragraphe, il ne vaut pas la peine de définir le polyschème régulier. Mais, pour en distinguer les especes, il faut adopter des signes abrégés. Or pour l'espace j'entends par (m, n) un polyèdre régulier dont les faces et les sommets se rapportent respectivement aux nombres rationnels m et n, de manière que $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{2\pi}{n}$ expriment les angles centraux respectivement du polygone plan (face) et du polygone sphérique (sommet). L'icosaèdre *convexe*, par exemple, a le signe $(3, 5)$, et l'icosaèdre *étoilé*, dont la nappe fait le tour 7 fois, a le signe $\left(3, \frac{5}{2}\right)$. L'inversion des deux chiffres fait naître le polyèdre *réciproque*. Les polyèdres réguliers se rangent en trois groupes :

$$1^o.\ (3, 3);\quad 2^o.\ (3, 4)\ \text{et}\ (4, 3);\quad 3^o.\ (3, 5), (5, 3), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right).$$

Quant au dernier groupe, je dois remarquer que l'icosaèdre convexe et l'étoilé peuvent être construits sur les mêmes sommets; pareillement les deux dodécaèdres.

Dans l'ordre 4 les polyschèmes (linéaires) réguliers se rangent en quatre groupes :

1°. $(3, 3, 3)$ a 5 sommets (tétraèdres sphériques), 10 côtés, 10 triangles, 5 tétraèdres.

2°. $(3, 3, 4)$ a 8 sommets (octaèdres sphériques), 24 côtés, 32 triangles, 16 tétraèdres.

$(4, 3, 3)$ a 16 sommets (tétraèdres sphériques), 32 côtés, 24 carrés, 8 hexaèdres.

3°. $(3, 4, 3)$ a 24 sommets (hexaèdres sphériques), 96 côtés, 96 triangles, 24 octaèdres. — Réunit les sommets d'un $(3, 3, 4)$ et d'un $(4, 3, 3)$ inscrits dans la même sphère d'ordre 4.

4°. $(3, 3, 5)$ a 120 sommets (icosaèdres sphériques), 720 côtés, 1200 triangles, 600 tétraèdres.

$(5, 3, 3)$ a 600 sommets (tétraèdres sphériques), 1200 côtés, 720 pentagones, 120 dodécaèdres.

$\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Mêmes sommets que pour le $(3, 3, 5)$ et combinaisons semblables. Mais l'enceinte fait le tour 191 fois.

$\left(\frac{5}{2}, 3, 3\right)$. Mêmes sommets et combinaisons que pour le $(5, 3, 3)$. Pentagones étoilés. Une droite, partant du centre, perce l'enceinte 191 fois.

$\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ et $\left(\frac{5}{2}, 3, 5\right)$ ont 120 sommets [communs avec le $(3, 3, 5)$], 720 côtés, 720 pentagones, 120 dodécaèdres.

L'enceinte fait le tour 20 fois.

Les cinq polyschèmes réguliers,

$$(3, 3, 4), \quad (4, 3, 3), \quad (3, 4, 3), \quad \left(5, 3, \frac{5}{2}\right), \quad \left(\frac{5}{2}, 3, 5\right),$$

peuvent être à la fois inscrits et circonscrits respectivement à deux sphères d'ordre 4.

D'ailleurs cela n'a lieu que pour deux réciproques à la fois.

Pour l'ordre 4 il y a donc *dix* polyschèmes réguliers.

Passons à des formules générales qui contiennent tous les détails que nous venons de rapporter.

Soient

(m, n, p) le caractère d'un polyschème (linéaire) régulier;

m', n', p' les numérateurs des nombres m, n, p, s'il y en a de fractionnaires, et ces nombres mêmes, s'ils sont entiers;

h le nombre de tours que fait l'enceinte;

k le nombre déterminé par $K.f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) = 2h$;

a_0, a_1, a_2, a_3 les nombres des sommets, des côtés, des polygones, des polyèdres;

α l'angle au centre du polyschème linéaire, correspondant au côté que nous prendrons pour l'*unité* de mesure linéaire;

δ l'argument compris entre deux polyèdres adjacents;

R, r les rayons des sphères, d'ordre 4, circonscrites et inscrites au polyschème linéaire;

V enfin sa mesure comme valeur de l'intégrale $\int\int\int\int dw\,dx\,dy\,dz$.

Cela posé, on aura

$$a_0 = \left(\frac{2}{n'} + \frac{2}{p'} - 1\right) K,\quad a_1 = \frac{2}{p'} K,\quad a_2 = \frac{2}{m'} K,\quad a_3 = \left(\frac{2}{m'} + \frac{2}{n'} - 1\right) K,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}\sin\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},\qquad \sin\frac{\delta}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},\quad \frac{r}{R} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$V = \frac{k}{48}\,\frac{\cos^2\frac{\pi}{m}\cos^2\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{\pi}{m}\left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

Il est visible que lors d'un changement du caractère (m, n, p) en (p, n, m) les angles α, $\pi - \delta$ se remplacent l'un l'autre et que le rapport $\frac{r}{R}$ reste le même; la conséquence de cette observation se trouve déjà énoncée ci-dessus. Les expressions précédentes font encore voir que

$$\Delta_4\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) = \sin^2\frac{\pi}{m}\sin^2\frac{\pi}{p} - \cos^2\frac{\pi}{n} > 0$$

est une condition de réalité du polyschème linéaire (m, n, p); on conclura de là aisément que, les nombres m, n, p devant être entiers, il ne peut y avoir d'autres polyschèmes réguliers (convexes) que ceux que nous venons d'énumérer.

Dans la même supposition l'on a

$$h = 1, \quad \text{donc} \quad k = \frac{2}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)};$$

et l'on pourra, par suite, calculer toutes les valeurs relatives au polyscheme (m, n, p) à l'aide de la transcendante

$$f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right).$$

Cela sera encore possible pour des valeurs fractionnaires de m, n, p, si le polyschème (m', n', p') existe, et que, par conséquent, les deux polyschèmes (m, n, p), (m', n', p') soient d'accord sous le rapport purement combinatoire; on aura, par exemple, pour le premier (l'étoilé)

$$h = \frac{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)}{f\left(\frac{\pi}{m'}, \frac{\pi}{n'}, \frac{\pi}{p'}\right)}.$$

Ainsi on trouve $h = 191$ pour le $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Mais pour le cas où le (m', n', p') n'existe pas, j'entends le $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$, nous manquons de tel artifice, et le seul moyen qu'il nous reste est la pure construction.

qui ne se refuse d'ailleurs à aucun cas. C'est par cette voie intuitive que j'ai d'abord trouvé tous les résultats précédents; mais l'exposition en serait fort longue.

Pour les ordres supérieurs à 4, il n'y a que deux groupes de polyschèmes réguliers, de sorte que ceux-ci existent au nombre de trois, avec les caractères

$$(3, 3, \ldots, 3, 3), \quad (3, 3, \ldots, 3, 4) \quad \text{et} \quad (4, 3, \ldots, 3, 3).$$

Avec les mêmes notations qu'auparavant, on a

1°. Pour le $(3, 3, \ldots, 3, 3)$,

$$a_i = \binom{n+1}{i+1}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{n}, \quad \cos\delta = \frac{1}{n},$$

$$R = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}, \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{n}, \quad V = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}};$$

2°. Pour le $(3, 3, \ldots, 3, 4)$,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad R = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{n}},$$

$$V = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{1.2.3\ldots n}, \quad a_i = 2^{i+1}\binom{n}{i+1};$$

et pour le $(4, 3, \ldots, 3, 3)$,

$$a_i = 2^{n-i}\binom{n}{i}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad \delta = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{n},$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad V = 1.$$

L'énumération serait incomplète, si nous passions sur les polyschèmes réguliers d'ordre n, à un nombre infini de périschèmes; je veux parler des manières diverses dont on peut remplir la totalité de $n-1$ dimensions par des polyschèmes réguliers d'ordre $n-1$.

Pour $n=3$, ces trois caractères $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$ indiquent respectivement que le plan peut être rempli de triangles, d'hexagones, de carrés.

Pour $n=4$, il n'y a, sous ce rapport, que le caractere $(4, 3, 4)$;

c'est-à-dire que l'espace ne peut être rempli uniformément que d'hexaèdres, et que leur arrangement autour d'un point a trait à l'octaèdre.

Pour $n = 5$, (m, n, p, q) étant le caractère cherché, la condition

$$\Delta_5\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right)$$
$$= \left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{q} - \cos^2\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{p} = 0$$

est nécessaire. On y satisfait par les cinq caractères :

$$(4, 3, 3, 4),\quad (3, 3, 4, 3),\quad (3, 4, 3, 3),\quad \left(5, 3, 3, \frac{5}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{2}, 3, 3, 5\right).$$

D'après les trois premiers caractères la totalité d'ordre 4 n'est remplie qu'une fois; mais d'après les deux derniers elle l'est 191 fois.

Pour chaque totalité supérieure il n'y a que le mode indiqué par le caractère $(4, 3, 3, \ldots, 3, 3, 4)$.

On trouve dans les *Comptes rendus* de 1848 (1^er semestre) quelques propositions sur les polyèdres réguliers, qui m'ont conduit à celles qui vont suivre.

1°. Si l'on projette tous les rayons, issus du centre et aboutissant aux sommets d'un polyschème (linéaire) régulier d'ordre n, sur une droite quelconque, la somme algébrique de ces projections sera nulle.

2°. Si l'on projette (orthogonalement) les mêmes rayons sur deux droites quelconques (qui partent, par exemple, du centre du polyschème), et qu'on fasse toujours le produit des deux projections d'un seul rayon, la moyenne arithmétique de tous ces produits sera la $n^{\text{ième}}$ partie du cosinus de l'angle compris entre les deux droites fixes, le rayon du polyschème étant pris pour unité linéaire.

Cette proposition double est d'ailleurs susceptible d'une plus large extension.

§ X.

Polyschèmes sphériques d'ordre n.

Jusqu'à présent nous avons toujours supposé le nombre des limites linéaires d'une intégrale sphérique égal au nombre d'ordre n. Considérons encore les deux cas, où le nombre des limites est inférieur ou supérieur à n.

Nous nous délivrons du premier cas en renvoyant à la formule (a'), § II; car elle donne presque immédiatement.

$$f_n(p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}) = 2^m f_{n-m}(p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}).$$

Dans le second cas je nomme la portion respective de l'enceinte sphérique d'ordre n, *polyschème sphérique* de cet ordre. L'arrangement de ses parties est tout à fait semblable à celui d'un polyschème linéaire d'ordre $n-1$. Il est clair qu'on peut le partager en plagioschèmes ou, si l'on veut, en orthoschèmes, procédant, en quelque sorte, de même que lorsque nous partageâmes un plagioschème donné en orthoschèmes. Au moyen du § II on parvient ensuite à la proposition que voici.

La différentielle complète d'un polyschème sphérique d'ordre n est égale à la $(n-2)^{ième}$ partie de la somme des produits de chaque périschème d'ordre $n-2$ et de la différentielle de l'argument correspondant.

Il faut bien se garder de prendre la $(n-2)^{ième}$ partie d'un périschème avant-dernier pour un véritable coefficient différentiel du polyschème : cela ne serait juste que pour l'ordre 4; car là, en effet, on peut envisager les arguments du polyschème comme autant de variables indépendantes, qui, seules, déterminent complétement la forme du polyschème. Quand $n=3$, ce n'est que l'aire du polygone sphérique qui est déterminée par les angles, mais non point la forme; pour celle-ci le nombre des variables indépendantes est plus grand que celui des angles. Quand n est >4, c'est le contraire qui a lieu; car, en général, le nombre des variables indépendantes est moindre que celui des arguments, en sorte que ceux-ci sont liés entre eux par un certain nombre de relations.

Concevons un polyschème sphérique d'ordre n; que le nombre de ses derniers périschèmes soit a_{n-2}, celui de ses sommets a_0, et que la somme des nombres de sommets de chaque périschème dernier soit $\sum b_0$; alors le nombre des variables indépendantes qui déterminent complétement le polyschème sphérique, sera

$$(n-1)(a_0+a_{n-2})-\sum b_0-\frac{n(n-1)}{2}.$$

Je ne fais que présumer que, pour $n>4$, (à part le plagioschème) le nombre des variables indépendantes est *inférieur* à celui des arguments a_{n-3}; mais cette induction a une grande probabilité. Du moins on peut prouver sans peine que le premier nombre ne surpasse jamais le second; et comme, en général, il n'y a point de raison pour qu'ils soient égaux, on est porté à croire que le premier est moindre que le second.

Dans le § III j'ai traité la réduction d'un plagioschème d'ordre impair à des plagioschèmes d'ordres inférieurs et pairs. Je rappelle que là nous n'avions pas besoin de descendre aux arguments dérivés pour former les plagioschèmes inférieurs contenus dans l'expression, mais que partout figuraient seuls les arguments primitifs. Or il en est de même des polyschèmes sphériques d'ordre impair; car on peut les exprimer aussi par des polyschèmes sphériques d'ordres inférieurs et pairs, sans avoir recours ni à la dissection du polyschème donné, ni à des arguments dérivés. J'éclaircirai cela par un exemple. Pour $n=3$, et en employant les *fonctions* sphériques au lieu des polyschèmes mêmes, l'aire d'un polygone sphérique est exprimée par la formule

$$f_3=\sum f_2-2a_0+4,$$

où a_0 marque le nombre des sommets du polygone, et f_2 l'angle entre deux côtés contigus, mesuré par l'angle droit; et visiblement il n'est besoin ni de partager le polygone, ni d'en connaître les côtés. Je vais tracer maintenant la marche à suivre, si l'on veut parvenir à l'expression de la *fonction-polyschème* d'ordre $2n+1$.

Commençons par lui supposer la forme

$$(I)\quad \left\{\begin{aligned} f_{2n+1}=\sum f_{2n}+\sum \mathrm{A}_3 f_{2n-2}+\ldots+\sum \mathrm{A}_{2m+1} f_{2n-2m}+\ldots\\ \ldots+\sum \mathrm{A}_{2n-1} f_2+\mathrm{A}_{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Ici la sommation indiquée dans le terme général doit s'étendre à tous les périschèmes d'ordre $2m+1$, dont chacun, par sa seule constitution combinatoire (sans le concours de rapports quantitatifs), détermine le nombre entier A_{2m+1} (positif ou négatif); puis, la fonction f_{2n-2m}, qui est multipliée par ce nombre A_{2m+1}, représente le polyschème sphérique d'ordre $2n - 2m$, formé par tous les polynômes-limites de f_{2n+1}, dont l'évanouissement détermine le périschème considéré. On a, par exemple, toujours $A_1 = 1$, quel que soit le sommet du f_{2n+1}, auquel ce A_1 est relatif; et la fonction f_{2n} représente alors le polyschème sphérique d'ordre $2n$, formé de toutes les limites qui passent par ce sommet. Ensuite on a $A_3 = 4 - 2$ fois le nombre de sommets du périschème respectif (polygone sphérique); il varie donc de l'un de ces polygones à l'autre. — Passons à un périschème d'ordre 5, et soient a_0 le nombre de ses sommets, a_2 celui de ses polygones, puis c_0 le nombre de sommets de l'un quelconque parmi ses polygones; alors le signe sommatoire $\int$ se rapportant à tous les polygones du périschème considéré, on aura, relativement à ce dernier,

$$A_5 = 16 - 8a_0 - 2\int(4 - 2c_0) = 16 - 8a_0 - 8a_2 + 4\int c_0.$$

Ce peu d'exemples suffit déjà, je crois, pour donner une idée de la nature des nombres A, et notamment pour faire entrevoir qu'ils sont sujets à une sorte de loi de récursion. Pour fortifier cette induction, je me borne à dire qu'il faut traiter l'équation différentielle de (l) comme identique par rapport aux différentielles de tous les arguments; on aura alors autant d'équations finies relatives à l'ordre $2n - 1$, où toutes les constantes nous doivent être connues d'avance (en vertu de la marche ascendante); lors de l'intégration, ces constantes passeront dans l'équation (l), sans éprouver le moindre changement, de manière que dans celle-ci il ne reste que le nombre A_{2n+1} qui nous soit inconnu. Afin de le déterminer, faisons coïncider tous les polynômes-limites de f_{2n+1} (y compris leurs signes), nous obtiendrons $f_{2n+1} = 2^{2n}$, même pour les polyschèmes inférieurs provenant d'omission de limites, et nous aurons

$$2^{2n} = 2^{2n-1}a_0 + 2^{2n-3}\sum A_3 + \ldots + 2\sum A_{2n-1} + A_{2n+1},$$

où a_0 est le nombre de sommets du f_{2n+1}. Cette équation fait clairement voir la loi de récursion qui régit la formation des nombres A.

Parmi les démonstrations que l'on a données de la formule d'Euler, relative aux polyèdres, l'une repose sur l'expression de l'aire du polygone sphérique. Un pareil usage, il me semble, pourrait se faire de la formule (l); au moins, pour $2n+1=5$, j'ai réussi à en dériver l'équation $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$ pour un polyschème linéaire d'ordre 5. Mais il suffira d'avoir signalé ce procédé, qui, du reste, est beaucoup plus pénible que la méthode purement combinatoire, et n'est point applicable aux ordres pairs.

Je vais terminer ce paragraphe en indiquant une propriété remarquable de deux *polyèdres sphériques complémentaires* d'ordre 4, dont voici la définition. Concevons un polyèdre sphérique quelconque de cet ordre, exprimé par la fonction f_4. Orthogonalement à tous ses polynômes-limites et en sens positif, tirons des rayons de la sphère d'ordre 4, dont les extrémités doivent être les sommets d'un nouveau polyèdre sphérique, exprimé par la fonction F_4, en telle sorte que les sommets, côtés, polygones de celui-ci répondent respectivement aux polygones, côtés, sommets de celui-là, et que, partant, chaque argument de F_4 sera le supplément du côté correspondant de f_4, et *vice versâ*. Or, si l'on désigne par α un argument quelconque de f_4, et par a le côté correspondant, on parviendra aisément à la proposition

$$f_4 + F_4 = 8 - \sum \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{2a}{\pi},$$

ou bien, en remplaçant les fonctions par les polyèdres s_4 et S_4 eux-mêmes,

$$s_4 + S_4 = \pi^2 - \frac{1}{2}\sum(\pi - \alpha)\,a.$$

DISCOURS DE M. J. LIOUVILLE,

PRONONCÉ AUX FUNÉRAILLES DE M. STURM,

LE JEUDI, 20 DÉCEMBRE 1855.

Messieurs,

Le géomètre supérieur, l'homme excellent dont nous accompagnons les restes mortels, a été pour moi, pendant vingt-cinq ans, un ami dévoué; et par la bonté même de cette amitié, comme par les traits d'un caractère naïf uni à tant de profondeur, il me rappelait le maître vénéré qui a guidé mes premiers pas dans la carrière des mathématiques, l'illustre Ampère.

M. Sturm était à mes yeux un second Ampère : candide comme lui, insouciant comme lui de la fortune et des vanités du monde; tous deux joignant à l'esprit d'invention une instruction encyclopédique; négligés ou même dédaignés par les habiles qui cherchent le pouvoir, mais exerçant une haute influence sur la jeunesse des écoles, que le génie frappe; possédant enfin, sans l'avoir désiré, sans le savoir peut-être, une immense popularité.

Prenez au hasard un des candidats à notre École Polytechnique, et demandez-lui ce que c'est que le théorème de M. Sturm : vous verrez s'il répondra ! La question pourtant n'a jamais été exigée par aucun programme : elle est entrée d'elle-même dans l'enseignement, elle s'est imposée comme autrefois la théorie des couples.

Par cette découverte capitale, M. Sturm a tout à la fois simplifié et perfectionné, en les enrichissant de résultats nouveaux, les éléments d'algèbre.

Ce magnifique travail a surgi comme un corollaire d'importantes recherches sur la mécanique analytique et sur la mécanique céleste, que notre confrère a données, par extrait seulement, dans le *Bulletin des Sciences* de M. Férussac.

Deux beaux Mémoires sur la discussion des équations différentielles et à différences partielles, propres aux grands problèmes de la physique mathématique, ont été du moins publiés en entier, grâce à mon insistance. « La postérité impartiale les placera à côté des plus beaux » Mémoires de Lagrange. » Voilà ce que j'ai dit et imprimé il y a vingt ans, et ce que je répète sans craindre qu'aujourd'hui personne vienne me reprocher d'être trop hardi.

M. Sturm a été le collaborateur de M. Colladon, dans des expériences sur la compressibilité des liquides, que l'Académie a honorées d'un de ses grands prix.

Nous lui devons un travail curieux sur la vision, un Mémoire sur l'optique, d'intéressantes recherches sur la mécanique, et en particulier un théorème remarquable sur la variation que la force vive éprouve lors d'un changement brusque dans les liaisons d'un système en mouvement. Quelques articles sur des points de détail ornent nos recueils scientifiques.

Mais, bien qu'il y ait de quoi suffire à plus d'une réputation dans cet ensemble de découvertes solidement fondées et que le temps respectera, les amis de notre confrère savent que M. Sturm est loin d'être là tout entier, même comme géomètre. Puissent les manuscrits si précieux que quelques-uns de nous ont entrevus se retrouver intacts entre les mains de sa famille! En les publiant, elle ne déparera pas les chefs-d'œuvre que nous avons tant admirés.

L'originalité dans les idées, et, je le répète, la solidité dans l'exécution, assurent à M. Sturm une place à part. Il a eu de plus le bonheur de rencontrer une de ces vérités destinées à traverser les siècles sans changer de forme, et en gardant le nom de l'inventeur, comme le cylindre et la sphère d'Archimède.

Et la mort est venue nous l'enlever dans la force de l'âge! Il est allé rejoindre Abel et Galois, Gopel, Eisenstein, Jacobi.

Ah! cher ami, ce n'est pas toi qu'il faut plaindre. Échappée aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dans le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la science.

Adieu, Sturm, adieu.

PRIX PROPOSÉS

PAR

L'ACADÉMIE DES SCIENCES [*].

L'Académie a proposé, sur des questions mathématiques, plusieurs grands prix dont nous croyons devoir donner ici les programmes. La solution des questions auxquelles ils se rapportent serait sans aucun doute d'un très-haut intérêt pour les géomètres. Tous ces prix consistent en une médaille d'or de la valeur de 3 000 francs; les noms des concurrents doivent être renfermés dans un billet cacheté qu'on n'ouvrira que si la pièce est couronnée. Le terme de rigueur pour le dépôt des Mémoires (qui doivent être adressés francs de port au Secrétariat de l'Académie) est seul différent. Voici les programmes de ces prix au nombre de six.

I.

THÉORIE DES PHÉNOMÈNES CAPILLAIRES.

« Reprendre l'examen comparatif des théories relatives aux phéno-
» mènes capillaires; discuter les principes mathématiques et physiques
» sur lesquels on les a fondées; signaler les modifications qu'ils peu-
» vent exiger pour s'adapter aux circonstances réelles dans lesquelles
» ces phénomènes s'accomplissent, et comparer les résultats du calcul
» à des expériences précises faites entre toutes les limites d'espace me-

[*] *Voyez*, pour plus de détails, les *Comptes rendus*, tome XLII, séance du 28 janvier 1856.

» surables, dans des conditions telles, que les effets obtenus par cha-
» cune d'elles soient constants. »

Terme de rigueur : le 1er avril 1856.

II.

THÉORÈME DE FERMAT.

« Trouver, pour un exposant entier quelconque n, les solutions en
» nombres entiers et inégaux de l'équation

$$x^n + y^n = z^n,$$

» ou prouver qu'elle n'en a pas, quand n est > 2. »

Terme de rigueur : le 1er avril 1856.

III.

THÉORIE DES MARÉES.

« Perfectionner dans quelque point essentiel la théorie mathéma-
» tique des Marées. »

Terme de rigueur : le 1er mai 1856.

IV.

MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE.

« Établir les équations des mouvements généraux de l'atmosphère
» terrestre en ayant égard à la rotation de la terre, à l'action calori-
» fique du soleil, et aux forces attractives du soleil et de la lune. »

Les auteurs sont invités à faire voir la concordance de leur théorie avec quelques-uns des mouvements atmosphériques les mieux constatés.

Lors même que la question n'aurait pas été entièrement résolue, si l'auteur d'un Mémoire avait fait quelque pas important vers la solution, l'Académie pourrait lui accorder le prix.

Terme de rigueur : le 1er janvier 1857.

V.

ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES CORPS ÉLASTIQUES.

« Trouver les intégrales des équations de l'équilibre intérieur d'un » corps solide élastique et homogène, dont toutes les dimensions sont » finies, par exemple, d'un parallélipipède ou d'un cylindre droit : » en supposant connues les pressions ou tractions inégales exercées » aux différents points de sa surface. »

Terme de rigueur : le 1er avril 1857.

VI.

MOUVEMENT DE LA CHALEUR DANS UN ELLIPSOÏDE.

« Trouver l'intégrale de l'équation connue du mouvement de la » chaleur, pour le cas d'un ellipsoïde homogène, dont la surface a un » pouvoir rayonnant constant, et qui, après avoir été primitivement » échauffé d'une manière quelconque, se refroidit dans un milieu » d'une température donnée. »

Terme de rigueur : le 1er octobre 1857.

Nous ajouterons encore le programme du prix *Bordin*. Quoique la question proposée se rattache surtout à la physique expérimentale proprement dite, elle n'est pourtant pas sans quelque liaison avec les questions mathématiques qui précèdent, par exemple avec celle des mouvements généraux de l'atmosphère.

PRIX BORDIN.

Feu M. Bordin, ancien notaire, ayant légué à l'Académie une rente de *trois mille francs* pour la fondation d'un prix annuel « à la meilleure composition sur des sujets ayant pour but : l'intérêt public, le bien de l'humanité, les progrès de la science et l'honneur national »,

L'Académie a décidé que ce prix serait décerné alternativement dans les Sections des Sciences mathématiques et dans celles des Sciences physiques.

Elle propose en conséquence, pour l'année 1856, la question suivante pour sujet de prix dans les Sections des Sciences mathématiques :

« Un thermomètre à mercure étant isolé dans une masse d'air at-
» mosphérique, limitée ou illimitée, agitée ou tranquille, dans des
» circonstances telles, qu'il accuse actuellement une température fixe,
» on demande de déterminer les corrections qu'il faut appliquer à ses
» indications apparentes, dans les conditions d'exposition où il se
» trouve, pour en conclure la température propre des particules
» gazeuses dont il est environné. »

Ce prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être déposés, francs de port, au Secrétariat de l'Institut avant le 1er octobre 1856, terme de rigueur.

TABLES DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES VINGT VOLUMES COMPOSANT LA 1re SÉRIE DE CE JOURNAL [*] ;

SUIVIES

D'UNE TABLE GÉNÉRALE PAR NOMS D'AUTEURS.

ANNÉES 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854 ET 1855.

TOME Ier. (ANNÉE 1836.)

[*] C'est pour la commodité seule de la librairie que nous faisons de ces vingt volumes une série séparée : du reste notre plan demeurera dans la série suivante ce qu'il a été dès l'origine du Recueil. Notre cadre, on le sait, embrasse également les progrès de la science et ceux des éléments. Nous continuerons à rechercher les meilleurs Mémoires, mais sans oser promettre que jamais il ne s'en glissera de médiocres, sous la responsabilité des géomètres qui les signent. Enfin nous serons, comme par le passé, très-sobres de remarques critiques et de leçons au public et aux auteurs. (J. LIOUVILLE.)

TOME II. (Année 1837.)

TOME III. (Année 1838.)

TOME IV. (Année 1839.)

TOME V. (Année 1840.)

TOME VI. (Année 1841.)

TOME VII. (Année 1842.)

TOME VIII. (Année 1843.)

TOME IX. (Année 1844.)

TOME X. (Année 1845.)

TOME XI. (Année 1846.)

TOME XII. (Année 1847.)

TOME XIII. (Année 1848.)

TOME XIV. (Année 1849.)

TOME XV. (Année 1850.)

TOME XVI. (Année 1851.)

TOME XIX (Année 1854.)

TOME XX. (Année 1855.)

TABLE DES MATIÈRES

PAR

NOMS D'AUTEURS.

A

B

C

K

L

Q

R

S

T

V

FIN DU VINGTIÈME VOLUME ET DE LA 1^re^ SÉRIE.

PLANCHES.

Tome I. — Pl. 1.	Tome XI. — » »
Tome II. — Pl. 1.	Tome XII. — » »
Tome III. — Pl. 1, 2, 3.	Tome XIII. — Pl. 1.
Tome IV. — Pl. 1, 2.	Tome XIV. — Pl. 1, 2.
Tome V. — Pl. 1.	Tome XV. — Pl. 1.
Tome VI. — Pl. 1.	Tome XVI. — Pl. 1, 2.
Tome VII. — Pl. 1.	Tome XVII. — » »
Tome VIII. — Pl. 1.	Tome XVIII. — Pl. 1, 2.
Tome IX. — Pl. 1, 2.	Tome XIX. — Pl. 1.
Tome X. — Pl. 1, 2.	Tome XX. — » »

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER
rue du Jardinet, 12.